corso di microeconomia 2002

Antonio Gay
facoltà di economia, economia e commercio,
università di Firenze

maggio 2002

Indice

[1]I paragrafi e le sezioni con l'asterisco possono essere trascurate.

1 [2]L'oggetto dell'Economia Politica*

1.1 le riflessioni

Cosa sia l'Economia Politica non è facile precisare. Si tratta di riflessioni su precedenti riflessioni e su fatti nuovi, o sui quali in precedenza non si era fermata la nostra attenzione, aventi ad oggetto quel fenomeno sociale che nel momento viene inteso per economia. Questa concatenazione di riflessioni segue una sua logica; ci si pongono delle domande, riflettendo sulle precedenti riflessioni, a cui non si riesce inizialmente a dare una risposta soddisfacente e per le quali vengono successivamente suggerite delle risposte ritenute più convincenti. Le domande che vengono proposte possono altresì scaturire dalle preoccupazioni che in un certo momento storico diventano più urgenti ed a cui si cerca di dare delle risposte empiriche che sembrino politicamente accettabili. Sono queste ricette funzionanti? Come possono essere migliorate? Devono essere sostituite da altre?

[2]I paragrafi e le sezioni con l'asterisco possono essere trascurate.

Sono questi gli interrogativi che possono attivare la riflessione economica, e quindi generare quella catena di riflessioni su riflessioni di cui dicevamo prima.

Tuttavia la successione delle riflessioni, quali si susseguono nel tempo, segue, accanto agli impulsi sistematici di cui si è appena detto, anche le regole del caso. Possono entrare elementi puramente casuali nel valorizzare e diffondere una certa teoria che perciò, non tanto per il suo merito intrinseco ma per questi altri fattori, finisce per imporsi all'attenzione e quindi suscitare quello sciame di considerazioni e di opinioni più o meno autorevoli che vanno dietro al successo casuale della iniziale riflessione.

Il pensiero ingenuo ritiene che i concetti che usa siano derivati immediatamente dalla così detta realtà. Un pensiero più avvertito si rende conto del fatto che il linguaggio che usa, quando cerca di descrivere la realtà, è esso stesso una invenzione degli uomini, che gli stessi avvenimenti sono suscettibili di descrizioni molto diverse, che lo stesso linguaggio utilizzato è per molti versi contingente ed almeno in parte arbitrario.

A differenza di quanto accade per le scienze della natura, nella riflessione dell'uomo su se stesso e sulla sua società, non si può proficuamente ricorrere alla procedura oggettivante dell'esperimento o alla traduzione quantitativa dell'esperienza. Infatti già in ciò che si vuole misurare entra una forzatura arbitraria quando si dimentica la natura in gran parte convenzionale di quanto si intende oggettivare e misurare. Ingenuamente si pensa che ciò che si misura abbia una consistenza indipendente dall'osservatore. Per questo diventa problematico, ad un minimo di avvedutezza critica, il ricorso, per dare fondamento alle riflessioni economiche, alla oggettività di un mondo ritenuto indipendente dall'osservatore.

Questa difficoltà di stabilire dei criteri di verità autorizza i cervelli più grossolani a fare a meno di qualsiasi forma di riflessione, o a ritenere che il livello delle riflessioni a cui sono arrivati nella loro prima giovinezza, sia bastevole e possa considerarsi definitivo. In una società nel complesso mediocre dal punto di vista del pensiero, la riflessione può apparire pleonastica. Alla fine questa società infantilmente soddisfatta finisce col fare tante cose inutili, a perdere tante energie per disfare, ciò che con meno superficialità eviterebbe di fare, quanto prima ha costosamente costruito con la sapienza di epoche meno stupide. La stupidità e la poca saggezza, conseguenza di un deficit nell'abitudine alla riflessione, finisce con l'avere un alto costo per la società quando non abbia addirittura la responsabilità di esiti tragici.

Siccome la riflessione è in gran parte assimilazione ed ulteriore elaborazione di riflessioni sviluppate da altri che ci hanno preceduto, diventa un problema quello di selezionare nel modo più opportuno tra tutto ciò che il passato e la attualità ci propongono. In un mondo in cui l'accesso alle informazioni ed ai testi diventa molto facile, ma altrettanto facile diventa proporre almeno virtualmente nuovi testi, selezionare diventa un'arte davvero difficile. Né ci si può affidare nella selezione al criterio della notorietà dato che questa, in un'epoca massmediatica come la nostra, è ampiamente manipolabile. Ciò che pensano i più troppo spesso non è altro che una convinta e ripetuta sciocchezza, il cui successo è dovuto allo scarso spessore intellettuale, morale ed estetico dei più ed alla loro mancanza di voglia e di tempo da dedicare alla elaborazione delle esperienze. D'altra parte è proprio dell'epoca attuale dare tanta importanza a quanto pensa la "gente". Questa infatti conta oggi molto di più di quanto non sia mai stato in passato, sia negli orientamenti del consumo che del risparmio, nelle scelte di vita, nella determinazione degli orientamenti politici e del costume.

Uno dei temi centrali su cui si è concentrata la riflessione economica può essere così sintetizzato. Come si deve pensare, e come si può immaginare di risolvere, in termini generali, il problema di garantire ai soggetti umani uno stato delle cose che, partendo da una situazione iniziale che sia data, non sia ulteriormente migliorabile? In termini molto semplificati: si tratta di ricavare il massimo da risorse date. Questo problema può essere precisato e specificato in molti modi e caratterizzato da tante possibili specifiche circostanze. In termini molto generali si potrebbe dire che l'oggetto di questa riflessione è chiedersi che cosa possa intendersi per comportamento razionale. Le circostanze che definiscono il contesto nel quale si pone il problema possono essere le più disparate: si tratta di un soggetto solo o di più soggetti? Il comportamento degli altri soggetti è assunto come dato e conosciuto oppure bisogna tentare di indovinarlo? Attraverso quali meccanismi il comportamento altrui modifica l'esito dell'azione del soggetto? Il comportamento riguarda una azione singolare o molte azioni successive secondo l'ordine del tempo? In quale modo il comportamento viene modificato a causa di cambiamenti nello stato iniziale o dei gusti stessi? In quali circostanze conviene cooperare ed in quali prevale la concorrenza e l'interesse individuale di ciascuno contrapposto a quello di ciascun altro?

Oggetto centrale della riflessione degli economisti può essere, anziché il comportamento razionale, qualche particolare esperienza storica che per il suo rilievo, per la sua permanenza nel tempo e per la vastità delle sue implicazioni meriti di diventare oggetto di continuate riflessioni. Può trattarsi della circolazione delle monete o dei biglietti di banca, dell'esperienza della disuguaglianza o del rapido modificarsi della tecnologia, della disoccupazione o dell'inflazione.

La circolazione della moneta è stato un tema sul quale si è concentrata molta della riflessione economica anche perché da essa diramano altri temi anch'essi centrali dell'economia teorica. Ricordiamo il problema del consumatore: come distribuire la moneta spesa tra i diversi beni che si possono acquistare? Quello dell'impresa: come trasformare denaro in altro denaro a condizioni più favorevoli? A quali condizioni la domanda e la offerta dei diversi beni, quali stimolate dalla moneta in circolazione, si equilibrano? Perché la mancanza di moneta per acquistare i beni necessari alla vita induce a vendere il proprio tempo di vita ad altri contro denaro? Come si può trasformare denaro attuale in denaro futuro?

2 Scelte e preferenze

Parlando di comportamento razionale abbiamo immaginato il problema di ricavare il risultato migliore da risorse date. Per "risorse date" possiamo intendere la definizione di un insieme di alternative, indichiamolo con X. Il comportamento razionale può essere immaginato come una scelta tra le alternative, laddove la scelta segua un criterio secondo cui le alternative siano ordinate. Il criterio di scelta, preferenza, può essere pensato come una relazione binaria definita in X che raccolga quelle coppie di alternative in cui la seconda è ritenuta migliore della prima, e quindi, tra le due, è preferita. Il processo di scelta avverrebbe allora in X passando da una alternativa ad un'altra ritenuta migliore e continuerebbe fino a che si arriva ad una alternativa che non conviene lasciare.

La relazione di preferenza che presiede alla scelta può essere di genere molto diverso, essa può riflettere solo i gusti di un certo soggetto, o risultare da una composizione dei gusti di diversi soggetti quando più soggetti hanno la possibilità di interferire nella scelta.

Iniziamo a studiare il problema di scelta di un solo soggetto.

2.1 la relazione di preferenza (forte) P e i massimali

Sia X l'insieme delle **alternative** tra cui deve scegliere un dato soggetto. Sia $x \in X$ una di queste alternative. Per il momento non è necessario essere più precisi circa la natura di queste alternative.

Per scegliere ci vuole un criterio secondo cui operare la scelta. Questo sarà offerto da una **relazione di preferenza** che indichiamo con P.

Dato l'insieme delle alternative X, è anche dato $X \times X$, il prodotto cartesiano di X per se stesso: l'insieme delle coppie costituite da elementi di X. Una **relazione binaria** in X, K, non è altro che un sottoinsieme di $X \times X$.

$$K \subset X \times X.$$

"Il simbolo $\subset$ lo usiamo come il simbolo di sottoinsieme, esso non esclude che i due insiemi possano essere uguali."

Le preferenze P sono un sottoinsieme di $X \times X$, quindi una relazione binaria, dotato di alcune proprietà che preciseremo. Per ora vale,

$$P \subset X \times X.$$

$(x, y) \in P$ si legge: *il portatore delle preferenze giudica* ***più conveniente*** *l'alternativa y rispetto alla alternativa x*, di conseguenza *preferisce y ad x*.

Le preferenze sono un insieme di **giudizi comparativi** secondo una dato criterio di comparazione. Nel nostro caso il criterio di comparazione è quello della convenienza. Il nostro è un caso particolare di criterio di comparazione. I giudizi di comparazione potrebbero alternativamente riguardare la bellezza, il calore, l'intelligenza e così via.

I giudizi di comparazione sono, prima di tutto, un fenomeno linguistico. Ed è proprio dalle necessità del linguaggio che ricaviamo quelle ulteriori proprietà che la P deve verificare.

Se sostengo che Tizio è più intelligente di Caio non posso, per la natura stessa del giudizio di comparazione, contemporaneamente giudicare Caio più intelligente di Tizio. Così, nel nostro caso, se giudico l'alternativa y più conveniente dell'alternativa x, quindi $(x, y) \in P$, non posso nel contempo giudicare l'alternativa x più conveniente dell'alternativa y, quindi $(y, x) \in P$.

Quindi la P deve verificare l'**antisimmetria**:

Definizione (antisimmetria) Se $(x, y) \in P$ *allora* $(y, x) \notin P$*,* (y, x) *non appartiene a* P*.*

In questo senso possiamo sostenere che la antisimmetria è una proprietà costitutiva dei giudizi di comparazione.

Certamente posso, col tempo, cambiare il mio giudizio nel suo opposto, ma ciò è diverso da ritenere contemporaneamente vero $(x, y) \in P$ e $(y, x) \in P$.

Immediata conseguenza della antisimmetria è che la P deve essere **irriflessiva**: se $x = y$ le coppie (x, y) e (y, x) coincidono, ma allora non potendo, per l'antisimmetria, entrambe stare in P , non può entrarvi nessuna delle due, quindi

$$(x, x) \notin P.$$

Indichiamo con $P(x)$ l'insieme delle alternative preferite ad x secondo P :

$$P(x) =: \{y \in X : (x, y) \in P\}.$$

$P(x)$ è un sottoinsieme di X, $P(x) \subset X$. Possiamo immaginare $P(x)$ come il valore assunto in $x \in X$ da questa particolare funzione definita in X e con valori nell'insieme dei sottoinsiemi di X.

Per l'irriflessività della P siamo certi che $x \notin P(x)$.

La relazione di preferenza serve a condurre a termine dei **processi di scelta** che si concludono quando si selezionano delle alternative che non conviene lasciare. Il concetto di **massimale** formalizza quest'idea.

Definizione (massimale) *Per* A *sottoinsieme di* X*, e* $x \in A$*, diciamo che* x *è massimale in* A *secondo* P *se* $\nexists\ y \in A$ tale che $(x, y) \in P$

ovvero *non vi sono in* A *dei migliori di* $x \in A$ *secondo* P*,*

$$P(x) \cap A = \emptyset.$$

Un massimale è una alternativa che non conviene lasciare in quanto non ve ne sono di migliori (almeno nell'insieme di alternative nelle quali siamo obbligati a restare).

Il concetto di **autonomo** fornisce una generalizzazione ad insiemi di alternative del concetto di massimale. Se B è un sottoinsieme non vuoto di A, tale che i migliori in A degli elementi di B appartengono ancora a B, non abbiamo interesse ad uscire da B per andare in A/B (il complemento di B in A). In questo caso B , può essere considerato un insieme massimale in A e verrà definito autonomo.

Definizione (autonomo) *Diciamo che* $B \neq \emptyset$ *è un autonomo in* A *secondo* P *se* $B \subset A$*, e, per ogni* $x \in B$*, vale* $(P(x) \cap A) \subset B$*. I migliori in* A *degli elementi di* B *appartengono a* B*.*

E' ovvio che l'insieme delle alternative X costituisce esso stesso un autonomo. Inoltre ogni massimale, considerato come l'insieme che contiene solo quel massimale, è anche un autonomo in X , infatti i suoi preferiti sono costituiti dall'insieme vuoto che è sottoinsieme di qualsiasi insieme.

Si osserva infine che l'unione e (quando non vuota) l'intersezione di autonomi è ancora un autonomo.

Consideriamo il seguente esempio che mostra come può esserci assenza di massimali mentre esistono autonomi quanto si vuole piccoli.

Esempio Sia $A = [0, 1)$, è questo un intervallo di reali che non contiene il suo estremo superiore, e P sia la relazione "maggiore di". Consideriamo l'insieme $(1 - \varepsilon, 1)$, per $0 < \varepsilon < 1$, esso è un autonomo. In questo caso non vi sono dei massimali in A secondo P, 1 non appartiene all'insieme, ma gli insiemi $\left(1 - \frac{1}{q}, 1\right)$, per q naturale che tende a $+\infty$, sono degli autonomi via via più piccoli.

2.2 transitività e sentieri

Un **sentiero** in X secondo la relazione P è un insieme finito, S, di alternative

$$S = \{x_1, .., x_q, ..., x_n\} \subset X$$

tali che $(x_q, x_{q+1}) \in P$ per ogni q da 1 a $n - 1$; tale sentiero parte da x_1 ed arriva in x_n in un numero $n-1$ di **passi**. Percorrendo un sentiero si sale secondo le preferenze.

Abbiamo un **ciclo** quando abbiamo un sentiero in cui il primo e l'ultimo elemento coincidono. In questo caso il salire nelle preferenze passo per passo si rivela effimero dato che alla fine siamo tornati al punto di partenza.

Una relazione che non consente la costruzione di cicli viene definita **aciclica**.

Definita la relazione di preferenza P, la cui proprietà costitutiva è la antisimmetria, essa può o meno verificare delle altre proprietà.

Una proprietà di queste può essere la **transitività.**

Definizione (transitività) *Una relazione di preferenza P è transitiva (**T**) se $(x, y) \in P$ e $(y, z) \in P$ implica che $(x, z) \in P$,*

$$(x, y) \in P \wedge (y, z) \in P \Longrightarrow (x, z) \in P.$$

Con la transitività vale il teorema che segue:

Teorema (preferiti inclusi) *Se P è transitiva e $y \in P(x)$ allora i preferiti di y sono un sottoinsieme proprio dei preferiti di x.*

Proof. In questo caso se $(x, y) \in P$ e sia $z \in P(y)$, quindi $(y, z) \in P$, si ha anche, per la transitività, $(x, z) \in P$, quindi $z \in P(x)$. Abbiamo quindi che $P(y) \subset P(x)$. Siccome in ogni caso $y \notin P(y)$ mentre $y \in P(x)$, $P(y)$ è un sottoinsieme proprio di $P(x)$, $P(y) \subsetneqq P(x)$. ■

Con la transitività un sentiero può sempre essere accorciato fino a ridurlo ad un solo passo; infatti se $\{x_1, .., x_q, ..., x_n\}$ è un sentiero, sarà anche $(x_q, x_{q+1}) \in P$ e $(x_{q+1}, x_{q+2}) \in P$, per la transitività $(x_q, x_{q+2}) \in P$. Dal sentiero che da x_1 porta in x_n si può togliere x_{q+1} ottenendo ancora un sentiero ma di $n-2$ passi. Proseguendo a togliere elementi intermedi si finisce con l'avere un sentiero di un solo passo che da x_1 porta direttamente in x_n.

Quindi, con preferenze transitive, se c'è un sentiero che, partendo da x porta in y, deve essere $(x, y) \in P$.

Con P transitiva, se vi fosse un ciclo che da x porta in x, avremmo $(x, x) \in P$ ma ciò è contro la antisimmetria delle preferenze. Quindi **la transitività esclude l'esistenza di cicli**.

Alcune importanti conseguenze della transitività riguardano l'esistenza e la ricerca di massimali. Un primo risultato è il seguente:

Teorema (massimali in insiemi finiti) *Se A è finito e non vuoto e P è transitiva allora, preso un qualsiasi elemento x in A che non sia già un massimale, esiste un sentiero che, partendo da x finisce in un massimale in A secondo P.*

Proof. Partendo da x si costruisce un sentiero S in A con $x_1 = x$. Poichè non possono esserci cicli, tutti gli elementi del sentiero sono diversi. Se l'ultimo elemento di S, x_n, non è massimale il sentiero può essere allungato aggiungendo un $x_{n+1} \in A$ tale che $(x_n, x_{n+1}) \in P$ ed ottenedo il sentiero S' con $n+1$ elementi tutti diversi. Siccome A è finito il sentiero non può avere più elementi di quelli che stanno in A, deve quindi raggiungere una alternativa dalla quale non può più essere allungato. Ciò può essere solo se questa alternativa è un massimale. ■

2.3 la completezza

Una proprietà ulteriore è la **transitività negativa**.

Definizione (transitività negativa) *Una relazione di preferenza soddisfa la transitività negativa (**TN**) se $(x, y) \notin P$ e $(y, z) \notin P$ implica $(x, z) \notin P$,*

$$(x, y) \notin P \wedge (y, z) \notin P \Longrightarrow (x, z) \notin P.$$

La transitività negativa si configura come la proprietà transitiva applicata alla relazione di non appartenenza a P, CP, il complemento di P in $X \times X$.

Un'altra proprietà è la seguente.

Definizione (completezza) *Una relazione di preferenza è **completa (C)** se $(x, y) \in P$ implica che se $z \in X$ valga $(x, z) \in P$ oppure $(z, y) \in P$, non escluso che valgano entrambe,*

$$(x, y) \in P \wedge z \in X \Rightarrow (x, z) \in P \vee (z, y) \in P.$$

La **completezza** garantisce che se tra due alternative una è migliore dell'altra, ogni altra alternativa sia o peggiore della migliore o migliore della peggiore.

Dimostriamo che:

Teorema (C=TN) *La transitività negativa (TN) e completezza (C) sono equivalenti,*

$$TN \Leftrightarrow C.$$

Proof. Dimostrare che $TN \Leftrightarrow C$ equivale a dimostrare che $\urcorner TN \Leftrightarrow \urcorner C$. $\urcorner$ sta per la negazione di ciò che segue. $\urcorner C$ significa che non vale la C.

$\urcorner C$ equivale ad avere in X dei x, y e z tali che $(x, y) \in P$, $(x, z) \notin P$ e $(z, y) \notin P$, ma questo può essere scritto come

$$(x, z) \notin P \wedge (z, y) \notin P \wedge (x, y) \in P.$$

Ciò equivale a $\urcorner TN$. ■

La completezza può essere formulata anche come segue,

$$(x, y) \in P \wedge (x, z) \notin P \Rightarrow (z, y) \in P.$$

Se y è preferito ad x e z non è preferito ad x, allora, se vale la completezza, y deve essere preferito a z.

La completezza è un'ipotesi molto utile in molti ragionamenti economici, per questo essa è comunemente ipotizzata. Il suo difetto è di essere poco realistica. Per convincercene consideriamo il seguente controesempio. Altri il lettore può costruirseli da solo.

Esempio Siano x e h due patrimoni in tutto uguali tranne per il fatto che in h ho 5 Euro in più sul conto corrente. Ovviamente $(x, h) \in P$. Sia z un terzo patrimonio molto diverso, per composizione, dai primi due che non considero né peggiore né migliore di x, quindi

$$(x, h) \in P, \quad (x, z) \notin P, \quad (z, x) \notin P.$$

Non per questo devo necessariamente considerare z peggiore di h. Nel caso abbiamo quindi $(x, z) \notin P$ e $(z, h) \notin P$ con $(x, h) \in P$. La completezza non vale.#

Le preferenze dell'individuo che non verificano la C vengono definite **incomplete**.

Vale il seguente teorema:

Teorema (transitività implicita nella completezza) *Se P è completa è anche transitiva,*

$$\textbf{completezza} \Longrightarrow \textbf{transitività.}$$

Proof. Dimostriamo che se la transitività è violata lo è anche la completezza. Se $(x, y) \in P$ e $(y, z) \in P$ ma $(x, z) \notin P$, quindi non vale la transitività, per l'antisimmetria di P abbiamo anche $(y, x) \notin P$ e quindi, contro la completezza, vale

$$(y, z) \in P \wedge (y, x) \notin P \wedge (x, z) \notin P.$$

■

La completezza è una condizione sufficiente per la transitività. Valendo la completezza non abbiamo bisogno di introdurre la transitività come ipotesi, essa è già implicita nella completezza.

Invece, senza completezza, se vogliamo avere P transitiva, dobbiamo introdurla come ipotesi.

Abbiamo anche:

Proposizione (inclusione dei preferiti) *Se P è completa e $(x, y) \notin P$ allora $P(y) \supset P(x)$.*

Proof. Se $z \in P(x)$, quindi $(x, z) \in P$, per ipotesi $(x, y) \notin P$, quindi, per la completezza, $(y, z) \in P$. Ma allora $z \in P(y)$ e quindi $P(y) \supset P(x)$. ■

Nel seguito non si ipotizzerà la completezza. Quando essa deve valere lo diremo esplicitamente.

2.4 Relazioni di equivalenza e di non ordinamento*

In generale se K è una relazione binaria definita in X, la sua relazione inversa $K\_$ è definita come

$$K\_ =: \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in K\}$$

Avendo definito la relazione di preferenza, possiamo quindi ricavarne la relazione inversa che definiremo come **"peggiore di"** e indicheremo con $P\_$.

Definizione (peggiore di) *La relazione $P\_$ è costituita dalle coppie (x, y) tali che $(y, x) \in P$,*

$$P\_ =: \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in P\}.$$

Scriveremo quindi $(x, y) \in P\_$ per indicare che y è peggiore di x, ovvero $(y, x) \in P$.

Date due alternative, x e y, potranno quindi darsi tre casi mutuamente escludentesi:

1. $(x, y) \in P$, che per l'antisimmetria di P implica $(y, x) \notin P$;
2. $(y, x) \in P$, che per l'antisimmetria di P implica $(y, x) \notin P$;
3. $(y, x) \notin P$ e $(x, y) \notin P$.

Le prime due categorie sono già state definite: abbiamo x peggiore di y (o y migliore di x) nel caso 1, x migliore di y (o y peggiore di x) nel caso 2, x non peggiore né migliore di y nel caso 3.

Definizione (non ordinati) *Diciamo che due stati x e y in X* ***non sono ordinati*** *da P se $x \neq y$ e vale*

$$(x, y) \notin P \wedge (y, x) \notin P.$$

L'insieme delle coppie non ordinate definiscono una relazione binaria, quella di **non ordinamento,** N:

$$N =: \left\{ (x, y) \in X \times X : (y, x) \notin P \cup P_{\_} \right\}.$$

Possiamo anche scrivere

$$N =: C(P \cup P_{\_}).$$

Con $P_{\_}(x)$ indichiamo $P_{\_}(x) =: \{y \in X : (y, x) \in P\} = \left\{ y \in X : (x, y) \in P_{\_} \right\}$, l'insieme dei peggiori di x.

Diciamo che due stati x e y in X sono ***equivalenti o indifferenti*** *secondo la relazione di preferenza P, se $P(x) = P(y)$ e $P_{\_}(x) = P_{\_}(y)$. Scriveremo allora* $(x, y) \in Q$ dove

$$Q =: \left\{ (x, y) \in X \times X : P(x) = P(y) \wedge P_{\_}(x) = P_{\_}(y) \right\}.$$

Q è la relazione di binaria in X, dedotta da P, di **indifferenza**.

$$Q(x) =: \{y \in X : (x, y) \in Q\}$$

indicherà l'insieme degli equivalenti di x.

La Q , è facile controllarlo, è una relazione che gode delle seguenti proprietà:

- riflessiva, $(x, x) \in Q$ quale che sia x;
- simmetrica, $(x, y) \in Q \Rightarrow (y, x) \in Q$;
- transitiva, $(x, y) \in Q$ e $(y, z) \in Q \Rightarrow (x, z) \in Q$.

La Q è quindi una relazione di equivalenza matematica.

Confrontando le due definizioni di non ordinati e indifferenti emerge che l'indifferenza implica non ordinamento, ovvero l'insieme degli stati tra loro equivalenti è un sottoinsieme dell'insieme degli stati non ordinati.

$$Q \subset N.$$

Il contrario non è necessariamente vero. Possono esistere alternative non ordinate dalla relazione di preferenza semplicemente perchè sono indifferenti e altre invece che non sono ordinate ma nemmeno indifferenti. Ad esempio l'equivalenza tra x e y non è verificata se, pur valendo $(x, y) \notin P$ e $(y, x) \notin P$, si ha $(x, z) \notin P$ ma $(y, z) \in P$.

Tuttavia:

Teorema dell'equivalenza *Se la P è completa il non ordinamento diventa condizione sufficiente per l'equivalenza, $Q = N$.*

Proof. Già sappiamo che valendo la completezza $(x, y) \notin P$ implica che $P(y) \supset P(x)$. Se $(x, y) \in N$ avremo dunque sia $P(x) \subset P(y)$ che $P(y) \subset P(x)$, quindi $P(y) = P(x)$. Se $(z, x) \in P$ e $(y, x) \notin P$ per la completezza deve essere $(z, y) \in P$, quindi $P\_(y) \supset P\_(x)$; se $(z, y) \in P$ e $(x, y) \notin P$ deve essere $(z, x) \in P$, quindi $P\_(x) \supset P\_(y)$. Ma allora vale anche $P\_(x) = P\_(y)$. ■

Con completezza non esistono più elementi non ordinati che non siano equivalenti. Rispetto ad ogni elemento $x \in X$ tutte le altre alternative sono incluse in una, ed in una sola, delle seguenti categorie mutuamente escludentesi:

- sono preferite;
- indifferenti;
- peggiori.

2.5 i massimali con completezza*

La completezza ha importanti implicazioni per la ricerca dei massimali. Se x è massimale e y non è peggiore di x, x ed y sono equivalenti. Quindi $P(y) = P(x) = \emptyset$, anche y è massimale. Concludendo,

con completezza due massimali in X secondo P sono anche equivalenti.

Ma allora, valendo la completezza, se esiste un massimale x, tutti gli altri elementi se non sono equivalenti ad x, nel qual caso anch'essi sono massimali,sono peggiori di x.

Lievemente differente dal concetto di massimale è quello di **massimo**.

Definizione (massimo) *Un massimo è un massimale x tale che gli altri elementi, se non sono equivalenti, sono peggiori*

$$\forall y \in X : (y, x) \notin Q \wedge P(x) = \emptyset \Longrightarrow (y, x) \in P.$$

Poichè con completezza, i massimali sono tra loro equivalenti, se x è un massimale e $y \notin Q(x)$ vale $(y, x) \in P$: ogni altro elemento che non sia equivalente ad x non può che appartenere ai suoi peggiori. Quindi

con completezza i massimali sono anche dei massimi.

2.6 la preferenza debole*

Fino ad ora abbiamo lavorato con la preferenza P, comunemente definita come **preferenza forte,** di cui l'antisimmetria è proprietà costitutiva. A partire da P si è successivamente definita la relazione di non ordinamento, N, e quella di equivalenza, Q. E' possibile ricavare da P anche una relazione di preferenza in senso debole.

Definizione (preferenza debole) *La relazione di preferenza* ***debole*** R *dedotta da* P *è definita come*

$$R =: CP_{\_},$$

il complemento della relazione di peggiore, ovvero $(x, y) \in R$ *se e solo se* $(y, x) \notin P$.

$(x, y) \in R$ si legge "x non è migliore di y".

Per come si è costruita la R, essa è una trasformazione (funzione) della P. Infatti da P si passa a $P_{\_}$ e successivamente al suo complemento $C\ P_{\_}$. Questa trasformazione è invertibile: da R posso riottenere P mediante la trasformazione $C\ R = C\left(C\ P_{\_}\right) = P_{\_}$ e $(C\ R)_{\_} = \left(\ P_{\_}\right)_{\_} = P$.

Siccome preferenze e preferenze deboli sono ricavate l'una dall'altra in modo univoco, esse esprimono in modo diverso una stessa sostanza. Tuttavia la preferenza forte va preferita come punto di partenza perchè i giudizi di cui è formata sono linguisticamente più trasparenti e meno equivoci. Tuttavia se altri ritiene opportuno partire dai giudizi di preferenza debole, la sostanza non cambia visto che essi sono traducibili in modo biunivoco in giudizi di preferenza (forte).

L'irriflessività di P garantisce che R sia riflessiva, ovvero $(x, x) \in R$, come si verifica facilmente dalla definizione. Più interessante è il risultato seguente.

R **transitiva equivale a** P **completa** *La relazione di preferenza forte* P *è completa se e solo se* R *è transitiva.*

Iniziamo dimostrando che

$$P \text{ completa} \Rightarrow R \text{ transitiva}$$

Procediamo per assurdo, supponiamo che non valga la transitività di R, ovvero esistono in X degli stati x, y, z per i quali vale $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$, ma $(x, z) \notin R$. Utilizzando la definizione di R possiamo riscrivere quanto sopra come $(y, x) \notin P$, $(z, y) \notin P$ e $(z, x) \in P$, ma ciò viola la completezza.

Dimostriamo ora che

$$R \text{ transitiva} \Rightarrow P \text{ completa.}$$

Se neghiamo la completezza di P devono esistere degli x, y e z tali che $(x, y) \notin P$, $(y, z) \notin P$ e $(x, z) \in P$, questo si può riscrivere sotto forma di R come $(y, x) \in R$, $(z, y) \in R$, e $(z, x) \notin R$ negando la transitività di R.

2.7 la rappresentazione delle preferenze attraverso una funzione di utilità

Definizione (funzione di utilità) *Diciamo che la funzione* $u : X \to \Re$, *definita sulle alternative e con valori reali, rappresenta la relazione di preferenza* P *se*

$$(x, y) \in P \iff u(x) < u(y).$$

Se attribuisco a y una utilità più alta di quella che attribuisco a x, allora y deve essere preferito a x e viceversa.

L'esistenza di una rappresentazione numerica per un ordinamento preferenziale non è ovvia. Come prima osservazione si noti che

Proposizione *Se la relazione di preferenza P è rappresentabile mediante una funzione u di utilità, la P deve essere completa.*

Proof. Se $(x, y) \in P$ deve essere $u(x) < u(y)$ e se $z \in X$, essendo $u(z)$ un numero, deve essere $u(x) < u(z)$ oppure $u(z) < u(y)$. Di conseguenza sarà $(x, z) \in P$ oppure $(z, y) \in P$. La P deve essere completa. ■

La completezza della P non è sufficiente a garantirne la rappresentabilità. Di ciò non diamo tuttavia la dimostrazione.

E' immediata la verifica della seguente proprietà: se la funzione u rappresenta la relazione di preferenza forte P e g è una funzione definita sui reali con valori reali,

$$g : \Re \to \Re,$$

monotona crescente, allora la funzione composta

$$g\,(u) = g{\circ}u$$

rappresenta ancora P.

Infatti, essendo g crescente, se $u(x) < u\,(y)$ abbiamo non solo $(x, y) \in P$ ma anche $g\,(u(x)) < g\,(u\,(y))$. Se $g\,(u(x)) < g\,(u\,(y))$ abbiamo $u(x) < u\,(y)$ e $(x, y) \in P$.

3 Preferenze composte e preferenze giuridiche

3.1 preferenze composte

Immaginiamo ora che le alternative siano dei particolari stati dell'economia. Di fatto spesso il passaggio da uno stato x ad un altro y, dove x e $y \in X$, richiede il consenso di più soggetti.

Dobbiamo quindi pensare a scelte che possono coinvolgere più di un soggetto e quindi anche a preferenze di soggetti diversi aventi ad oggetto uno stesso insieme di alternative, X.

Indichiamo con M l'insieme dei soggetti di una economia. M deve essere un insieme finito. Se i soggetti sono m possiamo attribuire a ciascuno un numero naturale da 1 a m che costituirà l'indice che lo caratterizza. Abbiamo allora che

$$M = \{1, ..., m\}$$

e con i indichiamo un soggetto generico di questa economia, $i \in M$.

Con P^i indichiamo la relazione di **preferenza** su X del soggetto i.

Con P indichiamo la **preferenza dell'economia.** Se $(x, y) \in P$ significa che in questa economia si preferisce sostituire x con y. Come ogni preferenza $P \subset X \times X$.

In realtà l'economia non è un soggetto che possa essere davvero dotato di preferenze. Il linguaggio che usiamo è quindi forzatamente allusivo. Tale P è una relazione di preferenza non più attribuibile ad un certo soggetto, ma per lo più è il frutto di un complesso procedimento di decisione che di norma coinvolge più soggetti.

Possiamo concepire la P come una funzione definita nelle preferenze individuali ed avente codominio nelle relazioni binarie su X:

$$P = f\left(P^1, P^2, ..., P^m\right)$$

e potremmo definirla **preferenza composta**.

La preferenza composta, anche se le preferenze individuali sono complete, normalmente non è completa e non è certo che sia antisimmetrica.

La funzione f può essere definita nei modi più diversi. Un caso estremo è quello del **dittatore**

$$P = P^j$$

dove j è un elemento di M. In questo caso, anche se l'economia è composta da più soggetti portatori ciascuno di una preferenza su X, a decidere è unicamente il soggetto j ed egli sceglierà secondo le proprie preferenze individuali.

Un caso meno estremo è quello in cui si ha un **direttorio**. Consideriamo un sottoinsieme non vuoto M', i membri del dirrettorio, dell'insieme di individui M, e P sia l'intersezione delle relazioni di preferenza degli $i \in M'$,

$$P = P_{M'} =: \cap_{i \in M'} P^i.$$

$P_{M'} =: \underset{i \in M'}{\cap} P^i$ indica le preferenze che sono comuni ai soggetti in M', quelli che sono membri del direttorio.

Un caso opposto al dittatore, altrettanto estremo, è quello in cui la decisione di lasciare una alternativa per un'altra richiede l'**unanimità**: è necessario che tutti preferiscano la seconda alla prima. La preferenza composta è in questo caso definita come

$$P_p =: \cap_{i \in M} P^i$$

$(x, y) \in P_p$ se e solo se $(x, y) \in P^i$ per ogni $i \in M$. Si parla in questo caso di **preferenza paretiana**. In questo caso abbiamo un direttorio esteso a tutti i soggetti dell'economia.

*Il passaggio dalla situazione x a quella y rappresenta un **miglioramento paretiano** se*

$$(x, y) \in P_p.$$

Nei casi ora descritti la preferenza composta mantiene la antisimmetria e se le preferenze di ciascuno sono transitive anche P lo è. In generale se le preferenze individuali sono complete non è vero che debbano esserlo quelle composte. Vedasi l'esempio che segue:

Esempio. $M = \{1,2\}$, $P^1 = \{(x,y), (x,z), (y,z)\}$ e $P^2 = \{(x,y), (z,y), (z,x)\}$, $P_p = \{(x,y)\}$.

3.2 preferenze giuridiche

Nei casi ora introdotti l'insieme di coloro che decidono il passaggio da uno stato ad un altro resta costante al cambiare degli stati. Più realistico è pensare che il diritto o, più in generale, il potere, definisca una funzione, dalle coppie di stati nei sottoinsiemi dei soggetti, che specifichi quali sono i soggetti che hanno il diritto di impedire il passaggio dal primo elemento della coppia al secondo. Indichiamo con

$$M_g : X \times X \to 2^M$$

questa funzione. Per $(x,y) \in X \times X$, $M_g(x,y) \subset M$ è il sottoinsieme dei soggetti che hanno diritto di impedire il passaggio dallo stato x allo stato y. Per il momento si ipotizza che in ogni caso $M_g(x,y) \neq \emptyset$. La preferenza composita, che in questo caso denominiamo **preferenza giuridica**, P_g, è ottenuta facendo $(x,y) \in P_g$ se e solo se $(x,y) \in P_{M'}$, si ricordi che in generale $P_{M'} =: \cap_{i \in M'} P^i$, per $M' = M_g(x,y)$. Abbiamo quindi che $(x,y) \in P_g$ se e solo se il passaggio da x a y è considerato vantaggioso da tutti coloro che potrebbero impedirlo,

$$(x,y) \in P_g \Leftrightarrow \cap_{i \in M_g(x,y)} P^i.$$

Potremmo ancora generalizzare questa costruzione immaginando che $M_g(x,y)$ possa essere costituito da una famiglia di sottoinsiemi di M, $M_g(x,y) = \{V_1, V_2, ..., V_l\}$, in questo caso $(x,y) \in P_g$ se e solo se esiste uno di questi sottoinsiemi di M, V_i, tale che $(x,y) \in P_{V_i}$.

$$(x,y) \in P_g \Leftrightarrow \exists V_i \in M_g(x,y) \quad t.c. \quad (x,y) \in P_{V_i}.$$

Abbiamo casi di questo genere quando è richiesta una maggioranza, magari, come nel caso della società per azioni, una maggioranza nelle azioni di cui i soci che formano il gruppo siano portatori. In altri casi, si pensi a gite sociali, è richiesto soltanto che vi sia un numero minimo di soci. I possibili gruppi capaci di formare una maggioranza sono molti, basta che uno tra essi sia d'accordo a compiere quel particolare passaggio perchè esso rientri nelle preferenze giuridiche.

In ogni caso si ha

$$P_p \subset P_g,$$

la preferenza paretiana è contenuta nella preferenza giuridica. Infatti se $(x,y) \in P_p$ a tutti conviene passare da x a y e di conseguenza anche ai soggetti aventi titolo per impedirlo, quelli in $M(x,y) \subset M$.

Se $M(x,y) = \emptyset$ nessuno può impedire il passaggio da x ad y e quindi basta che vi sia qualcuno che preferisce questo passaggio perché esso rientri in P_g. Se $M(x,y) = \emptyset$, $(x,y) \in P_g \Leftrightarrow \cup_{i \in M} P^i$.

Le preferenze giuridiche non rappresentano soltanto i gusti di qualche soggetto, ma piuttosto indicano se vi sono nell'economia le forze per passare da uno stato all'altro. Nulla garantisce che le preferenze giuridiche siano antisimmetriche. Potrebbe essere che $M(x,y)$ e $M(y,x)$ abbiano intersezione nulla. Può accadere allora che le preferenze giuridiche consentano di passare da x ad y ma anche da y ad x: se i soggetti in $M(x,y)$ vogliono lasciare x per y, quindi $(x,y) \in P_g$, ma i soggetti in $M(y,x)$ sono tutti differenti e, a loro volta, sono favorevoli a lasciare y per x, abbiamo anche che $(y,x) \in P_g$. Se invece fosse $M(x,y) \cap M(y,x) \neq \emptyset$ quanto sopra non potrà più accadere: il soggetto che è in entrambi i gruppi, avendo preferenze antisimmetriche, impedirà necessariamente uno dei due passaggi.

Se ipotizziamo che $M(y,x) \cap M(x,y) \neq \emptyset$, per ogni $(x,y) \in X \times X$, allora P_g è necessariamente antisimmetrica.

Qualora l'oggetto del passaggio sia una compravendita, per annullarla è necessario l'accordo di tutte le parti: in questo caso $M(x,y) = M(y,x)$ e quindi se $(x,y) \in P_g$ non può essere $(y,x) \in P_g$.

Anche in questo caso non è tuttavia possibile escludere la presenza di cicli.

Possiamo indicare l'insieme dei soggetti favorevoli al passaggio da x ad y con

$$M^+(x,y) =: \left\{ i \in M : (x,y) \in P^i \right\}.$$

La condizione per cui $(x,y) \in P_g$, può scriversi allora come $M_g(x,y) \subset M^+(x,y)$: tutti i soggetti che potrebbero impedire il passaggio da x a y sono a favore del passaggio stesso. Per l'antisimmetria delle preferenze individuali $M^+(x,y) \cap M^+(y,x) = \emptyset$. Se $M^+(x,y)$ e $M^+(y,x)$ sono insiemi entrambi non vuoti vuol dire che vi sono dei soggetti che preferiscono y ad x, ma anche che vi sono altri che preferiscono x a y. La scelta tra x e y è, in questo caso, **conflittuale**.

Se $(x,y) \in P_p$, il passaggio da x a y è un miglioramento paretiano, $M^+(x,y) = M$ e in questo caso $M^+(y,x) = \emptyset$. La scelta non è conflittuale.

Se $(x,y) \in P_g$, e questo passaggio è conflittuale, ovvero $M^+(y,x) \neq \emptyset$, abbiamo che $M(x,y) \cap M^+(y,x) = \emptyset$, i contrari al passaggio non hanno diritto di impedirlo. Questa è l'unica ragione per cui possono verificarsi dei passaggi conflittuali.

Supponiamo che sia $M(x,y) = \{1,2\}$, $M(y,z) = \{2,3\}$ e $M(z,x) = \{1,3\}$. Siano poi $(x,y) \in P^1 \cap P^2$ e $(y,z) \in P^2 \cap P^3$ e $(z,x) \in P^1 \cap P^3$. Le preferenze individuali siano complete (di conseguenza anche transitive). In questo caso 1 e 2 sono d'accordo a lasciare x per y; 2 e 3 a lasciare y per z; 1 e 3 a lasciare z per x. In questo caso si verifica un ciclo nella preferenza giuridica P_g nonostante la ipotizzaata completezza delle preferenze individuali.

Il caso precedente si può dare anche qualora vi siano solo i soggetti indicati e sia richiesta per ogni passaggio una maggioranza di soggetti favorevoli.

E' possibile definire l'insieme delle alternative a cui si può arrivare in un solo passo, partendo da $x \in X$, secondo le preferenze giuridiche

$$P_g(x) = \{y \in X : (x, y) \in P_g\}.$$

I massimali secondo la P_g, gli elementi di X tali che $P_g(x) = \emptyset$, rappresentano delle situazioni finali dell'economia: ogni cambiamento ulteriore trova l'opposizione di qualcuno che ha diritto di bloccare il passaggio.

La preferenza paretiana P_p, è, già lo sappiamo, una vera preferenza, verifica infatti l'antisimmetria. Nei suoi massimali il passaggio verso un'altra alternativa è bloccato da un soggetto che non gradisce il passaggio ed ha il diritto di impedirlo.

I massimali secondo P_p in x sono detti ***ottimi paretiani****.*

Definiamo con X_g^* e X_p^* i massimali secondo, rispettivamente, la relazione di preferenza giuridica e paretiana. Poichè $P_p \subset P_g$ abbiamo che $P_p(x) \subset P_g(x)$. Di conseguenza se $P_g(x) = \emptyset$, quindi $x \in X_g^*$, deve anche essere $P_p(x) = \emptyset$ da cui $x \in X_p^*$. x, massimale secondo la preferenza giuridica, è un ottimo paretiano. Vale quindi

$$X_g^* \subset X_p^*.$$

Un ottimo paretiano $x \in X_p^*$ non appartiene a X_g^* se esiste un y tale che i soggetti in $M(x, y) \subset M$ hanno convenienza a lasciare x per y mentre quelli che avrebbero convenienza a bloccare il passaggio da x a y non hanno il potere per farlo; non sono in $M(x, y)$.

Si può interpretare l'affermarsi del diritto come un modo per evitare che l'economia si fermi appena raggiunge un ottimo paretiano anche quando ulteriori cambiamenti sarebbero fortemente desiderati da soggetti il cui interesse si ritiene socialmente apprezzabile e prevalente su quello di altri che invece, qualora fosse richiesta l'unanimità, potrebbero impedire il passaggio.

Nel passaggio da P_p a P_g si restringe l'insieme dei massimali. Stati dai quali non ci si poteva muovere quando era richiesta l'unanimità, ora possono essere lasciati se ciò conviene ai soli aventi diritto a bloccare il passaggio. Gli individui, col diritto, vedono allargarsi la sfera della loro libertà: possono fare più cose di quelle che potrebbero fare se fosse richiesto sempre un consenso unanime.

3.3 processo di scelta e compiacenza

Per lasciare x per y è necessario che y sia considerato migliore da tutti i soggetti in $M(x, y)$. Una richiesta meno forte potrebbe essere la seguente: si lascia x per y se in $M(x, y)$ non c'è nessuno che considera dannoso il passaggio e c'è almeno un soggetto che lo considera con favore. In termini formali avremmo

$$\textit{si lascia } x \textit{ per } y \textit{ se e solo se } \exists\, i \in M(x, y)\ (x, y) \in P^i \wedge \forall\, j \in M(x, y)\ (y, x) \notin P^j.$$

In questo caso si può dire che, accettando di lasciare x per y solo perchè questo non costituisce per lui un danno, un soggetto è **compiacente** verso coloro i quali hanno invece una effettiva convenienza a realizzare il passaggio. Per il soggetto i compiacente, $(x, y) \notin P^i$, altrimenti egli avrebbe un interesse positivo al passaggio e quindi, dando il suo consenso al passaggio, non lo farebbe per compiacenza ma per convenienza. In ogni caso per lui $(y, x) \notin P^i$, in caso contrario egli rifiuterebbe il consenso essendo il passaggio per lui dannoso.

Il soggetto accetta di essere compiacente perché a lui non ne deriva un danno mentre altri, quelli che gli chiedono il consenso, ne hanno un vantaggio.

Se il nostro soggetto fosse due volte di seguito compiacente potrebbe accettare di passare da x ad y e quindi da y a z semplicemente perché $(y, x) \notin P^i$ e $(z, y) \notin P^i$. Ma potrebbe essere che $(z, x) \in P^i$. Essendo due volte compiacente il soggetto finirebbe col trovarsi in uno stato, z, peggiore di quello iniziale, x. Siamo certi che questo non può succedere se $P^i(x) = P^i(y)$.

Se le preferenze del soggetto sono complete vale la transitività negativa e quindi $(y, x) \notin P^i$ e $(z, y) \notin P^i$ implica $(z, x) \notin P^i$: la compiacenza, anche ripetuta, non può essere dannosa.

4 Azioni e conseguenze

Nella teoria esposta fino ad ora i soggetti avevano davanti a sé delle alternative, tra queste stabilivano delle preferenze, quando ne avevano il potere decidevano se lasciare una alternativa per un'altra. Le alternative erano contemporaneamente l'oggetto delle preferenze e delle scelte. Ora dobbiamo studiare le situazioni più realistiche e complesse in cui la scelta riguarda qualcosa di diverso da ciò che conta quando si stabiliscono le preferenze.

Ogni soggetto decide quale **azione** fare tra quelle che gli sono consentite, ma per lui ciò che conta sono gli effetti e questi solo parzialmente sono determinati dalla sua azione. Si crea così uno jato tra la scelta, che riguarda l'azione, e gli effetti della scelta.

Se ogni scelta avesse un solo effetto potrei dire che scegliendo l'azione scelgo in realtà l'effetto. Quando invece la scelta può avere molti ed alternativi effetti, il suo esito, le sue conseguenze, sono incerte. La natura di questa incertezza è ciò che vogliamo iniziare a chiarire.

I fattori che determinano questa incertezza sono essenzialmente raccolti in due categorie, vi sono dei fattori fuori dal controllo degli uomini, le **circostanze**, che fanno cambiare, o meglio specificano diversamente, il risultato delle loro azioni, e vi sono le azioni degli altri soggetti che cambiando, a parità di circostanze, possono cambiare l'effetto per ciascuno della sua azione. Le **azioni degli altri** non sempre si riesce a predeterminarle, eventualmente vincolandole mediante accordo, o a conoscerle prima di dover decidere la propria azione.

Se l'individuo, prima di compiere la propria azione, fosse in grado di conoscere tutte le circostanze rilevanti ai suoi fini, quali si sono già verificate e quali si verificheranno mentre gli effetti della propria azione si dipanano, nonché le azioni di tutti gli altri, l'effetto della sua azione sarebbe totalmente determinato.

Gli schemi che seguono servono proprio perchè, in genere, non è questo il caso.

4.1 azioni, circostanze e conseguenze

Indichiamo con A^i l'insieme delle azioni che può compiere il soggetto i, $a^i \in A^i$ è una di queste. Una azione complessiva si ottiene precisando l'azione di ciascuno dei differenti individui,

$$a = (a^1, a^2, ..., a^m).$$

Abbiamo dunque

$$a \in A$$

dove

$$A = (A^1 \times A^2 \times .... \times A^m),$$

A è il prodotto cartesiano degli insiemi di azioni individuali.

Esempio. I soggetti 1 e 2 decidono, ciascuno di propria iniziativa, di recarsi il giorno successivo a cercare funghi in uno stesso piccolo bosco del Casentino. Altre azioni potrebbero essere, andare a funghi in un altro posto o non andare a funghi, o che ci vada uno solo dei due.#

Con W indichiamo l'insieme delle **circostanze**, ovvero l'insieme di stati di natura che possono realizzarsi e la cui conoscenza riterremmo utile per la nostra decisione. Indicheremo con

$$w \in W$$

una circostanza particolare. Una di queste, per essere precisata e descritta, richiederebbe una gran massa di informazioni che per lo più non abbiamo ma che ci sarebbe utile conoscere quando dobbiamo decidere se compiere o meno una certa azione. Le informazioni che dovremmo avere per descrivere compiutamente la circostanza $w \in W$ possono non aver mai termine, è sempre possibile una descizione più accurata di uno stato del mondo. Quello che certamente sappiamo è che questa $w \in W$ esiste anche se ne abbiamo una conoscenza molto parziale. Non dobbiamo confondere la circostanza, o stato del mondo, che esiste a prescindere da ciò che ne sappiamo, la $w \in W$, da quello che di essa conosciamo.

Siccome le circostanze sono rilevanti quando dobbiamo decidere se fare o meno una certa azione, può essere che ciò che ci servirebbe sapere sia meno della conoscenza completa di uno stato del mondo, ma solo quello che conta per sapere il nesso tra l'azione e conseguenze. Ma spesso questa restrizione del punto di vista non è una semplificazione che possiamo considerare davvero decisiva.

Esempio. Il mio problema sia decidere se costruire uno stabilimento in Romania. Non mi basta sapere che in Romania posso trovare facilmente mano d'opera a buon mercato. Mi sarebbe utile sapere se posso contare sulla sua lealtà se io tengo un atteggiamento corrretto. Mi interessa sapere anche se mi troverò a fare i conti con i ricatti di organizzazioni delinquenziali, e nel caso se posso contare sulla polizia locale. Se, nel caso di controversie legali, posso contare o meno su una magistratura competente ed onesta. Non solo, se faccio questo stabilimento per ricuperarne il costo mi ci vuole qualche anno. Ed allora dovrei sapere come le cose in Romania evolveranno negli anni a venire. Come si vede la conoscenza delle circostanze rilevanti diventa sempre più complessa anche se da tante altre informazioni posso prescindere vista la natura del mio problema di scelta.#

Gli individui hanno un controllo diretto sulle proprie azioni, ovvero sono in grado di decidere, e quindi mettere in atto, l'azione da compiere, ma non necessariamente hanno lo stesso controllo sulle conseguenze dell'azione. Quale specifica conseguenza abbia una particolare azione, dipende dalla circostanza che si verifica e dalle azioni degli altri individui.

Le possibili **conseguenze** delle azioni formano l'insieme C, i possibili esiti scaturenti dalle azioni stesse. $c \in C$ indica una conseguenza particolare. Nella descrizione di

$$c \in C$$

sono precisate le conseguenze per ogni soggetto.

La funzione

$$f : A \times W \to C$$

mette in relazione le azioni e le circostanze con le conseguenze da esse generate. $f(a, w) = c$ indica che l'azione a, nella circostanza w, ha come conseguenza c.

Esempio. Ritornando al primo esempio, se i due vanno nello stesso bosco, la stessa mattina, e vale la circostanza per cui vi sono funghi, la conseguenza della loro azione sarà di trovare ciascuno dei funghi ma meno di quelli che avrebbe trovato ciascuno se fosse andato da solo nel bosco.#

4.2 gli eventi e la conoscenza di ciascuno

Al soggetto servirebbe conoscere esattamente quale circostanza si è verificata, o si verificherà, per conoscere l'effetto per lui della azione complessiva a cui egli concorre. Ma di solito la sua conoscenza non è così accurata.

La capacità di conoscenza del soggetto è rappresentata da quelli che sono per lui gli **eventi**. Un evento è semplicemente un insieme di circostanze. E rappresenti **l'insieme dei possibili eventi** per il nostro soggetto. Se $H \in E$ abbiamo che

$$H \subset W.$$

Se la circostanza che si è in effetti realizzata è $w \in W$, gli eventi che il soggetto **sa essersi realizzati** sono quelli $H \in E$ per i quali vale $w \in H$. Gli eventi che il soggetto sa che non si sono realizzati sono quelli $H' \in E$ per i quali vale $w \notin H'$.

In genere un evento è costituito da un particolare **avvenimento**, un insieme di circostanze nella cui descrizione entra, insieme a molte altre caratteristiche diverse, una caratteristica comune.

Esempio. Se l'avvenimento è che a Firenze piove, posso individuare tutte le circostanze che hanno in comune questo avvenimento. Per la mia azione mi interesserebbe sapere molte altre cose, quale è il livello dell'Arno, è caduto o no il governo, c'è neve a Cortina, come sta andando il dollaro, e così via aggiungendo. Se so soltanto che sta piovendo a Firenze, so davvero poco.#

L'insieme degli eventi per i quali il soggetto è in grado di precisare se si sono o meno verificati, E, ha, per come è stato concepito, le seguenti caratteristiche.

1. W è un evento, $W \in E$: so che sempre qualcosa succede, in questo momento si sta verificando una certa circostanza anche se non so quale;

2. se $H \in E$ anche W/H, il complemento di H in W, appartiene ad E: se sono in grado di riconoscere che si è verificato l'evento H sono anche in grado di sapere quando H non si è verificato. Evidentemente gli eventi H e W/H non possono realizzarsi contemporaneamente;

3. se A e B appartengono ad E anche $A \cup B$ e $A \cap B$ appartengono ad E: se sono capace di sapere se si è verificato A e/o B, sono anche capace di sapere se si sono verificati entrambi, $A \cap B$, o almeno uno dei due, $A \cup B$.

L'insieme E rappresenta la capacità di **distinguere** e quindi di conoscere dell'individuo: esso ci dice quali sono gli eventi che egli è in grado di riconoscere. Se w' e w'' sono due circostanze diverse il soggetto è in grado di distinguerle se esiste per lui un evento $H \in E$ che contiene w'ma non w'', tale quindi che

$$w' \in H \wedge w'' \in W/H.$$

Se si verifica w' il soggetto, in questo caso, è in grado di sapere che non si è verificato w''. Infatti egli sa, in questo caso, che si è verificato l'evento H che non contiene w''. Se invece si è verificato w'' il soggetto sa che si è verificato l'evento W/H e quindi che la circostanza w' non si è verificata. Al contrario se

$$w' \in H \in E \Rightarrow w'' \in H,$$

vale anche

$$w'' \in H' \in E \Rightarrow w' \in H'.$$

Se infatti fosse $w'' \in H' \in E \wedge w' \notin H'$ avremmo che $w' \in W/H' \in E$ ma $w'' \notin W/H'$. Quindi se $w' \in H \in E \Rightarrow w'' \in H$ il soggetto non riesce a distinguere se si è verificata la circostanza w' oppure quella w''.

Se si è verificata la circostanza $w \in W$, il soggetto sa cosa è successo, w, solo se tra gli eventi c'è anche $\{w\}$, $\{w\} \in E$. Se invece questo non è il caso vuol dire che in ogni evento $H \in E$ di cui si può dire che si è verificato, quindi $w \in H$, ci sono anche altre circostanze $w' \in W$ che stanno ancora in H e che il soggetto non riesce a distinguere da w.

4.3 l'insieme degli eventi: gradazioni di conoscenza individuale

Abbiamo il massimo di ignoranza quando l'individuo non è in grado di distinguere tra nessuna coppia di circostanze diverse: quindi qualora

$$E = \{W, \emptyset\}.$$

Il massimo di conoscenza si ha invece qualora E sia costituito da tutti i possibili sottoinsiemi di W,

$$E = 2^W,$$

ovvero il soggetto è in grado, in particolare, di distinguere ogni circostanza.

Possiamo confrontare due insiemi di conoscenza per definirne il grado di finezza: E' rappresenta una conoscenza meno analitica di E'' se

$$E' \subsetneqq E''.$$

Gli eventi che il soggetto è in grado di riconoscere in E' sono riconosciuti anche in E'' mentre vi sono degli eventi in E'' che non stanno in E'. Un processo di **apprendimento** sarà riconoscibile come il passaggio da una conoscenza meno ad una più analitica.

Diciamo che $H \in E$ è **irriducibile** se H è costituito da almeno un elemento e non esiste in E un suo sottoinsieme proprio che non sia vuoto. Se una circostanza w' appartiene ad un evento irriducibile H', questo rappresenta la conoscenza più analitica che, verificandosi quella circostanza, il soggetto può avere. Il soggetto non è più in grado di distinguere ulteriormente tra le circostanze in H'. Possiamo indicare con $H(w)$ l'evento irriducibile, se esiste, che contiene w.

Se E è un insieme finito la funzione $H(w)$ è certamente definita. $H(w)$ non è altro che l'intersezione degli eventi che contengono w, $H(w) =: \bigcap\{H \in E : w \in H\}$, per la proprietà della intersezione di eventi in E e per la finitezza di E siamo certi che $H(w) \in E$. Ciò non è detto che sia vero quando E non è finito. In questo caso l'insieme degli eventi che contengono w, $\{H \in E : w \in H\}$, non ha necessariamente un minimo secondo la relazione di inclusione tra insiemi e non è detto che $\bigcap\{H \in E : w \in H\}$ appartenga ad E.

Esempio. E sia costituito da $\emptyset$ e da tutti gli intervalli aperti di numeri reali, e dalle loro unioni. w sia un numero reale. In questo caso $H(w) = \{w\}$ ma $\{w\} \notin E$.

4.4 la relazione di più probabile

Se l'insieme E indica cosa il soggetto è in grado di sapere quando una specifica circostanza si sarà verificata, prima che questa si verifichi il soggetto può soltanto formulare dei giudizi comparativi di probabilità tra gli eventi che potranno verificarsi. Tali comparazioni costituiscono una relazione binaria di **"più probabile",** definita su E e che indicheremo con

$$\Pi \subset E \times E.$$

relazione di "più probabile" *Se vale* $(A, B) \in \Pi$, *dove* A *e* B *appartengono ad* E, *vuol dire che si ritiene più probabile che si verifichi una circostanza che appartiene a* B *anziché una che appartiene ad* A.

Come tutte le relazioni di comparazione la Π è una relazione binaria, possiamo quindi applicare alla stessa alcune delle proprietà già discusse per la relazione di preferenza.

La relazione di più probabile verifica, come proprietà costitutiva, la **antisimmetria**: se $(A, B) \in \Pi$ allora $(B, A) \notin \Pi$.

Altre proprietà sono peculiari alla relazione di più probabile.

Qualora $B \subset A$ non può essere $(A, B) \in \Pi$: se si verifica una circostanza in B, si verifica anche una circostanza in A, quindi B non può essere giudicato più probabile di A. Vale dunque

$$A, B \in E \wedge B \subset A \Longrightarrow (A, B) \notin \Pi.$$

La relazione di più probabile non è necessariamente **completa**. Non necessariamente il soggetto è in grado di mettere a confronto tutti i possibili eventi definendone un ordinamento completo: quando i non ordinati sono equivalenti secondo la Π. Formalmente: se $(A, B) \in \Pi$ e C è un altro evento in E, non necessariamente si verifica $(A, C) \in \Pi$ oppure $(C, B) \in \Pi$. Se infatti A e B sono eventi molto simili, magari con B che contiene A e poche altre circostanze, $(A, B) \in \Pi$, e C è un evento molto diverso sia da A che da B di cui non si riesce a stabilire se sia o meno più probabile di A, non per questo deve essere $(C, B) \in \Pi$.

Esempio. Immaginiamo che A sia l'evento in cui nevica a Firenze tra il 10 ed il 20 marzo del prossimo anno, B sia l'evento per cui nevica nei giorni tra il 9 ed il 19 del marzo del prossimo anno, C sia l'evento per cui a Viareggio il prossimo 5 luglio il mare ha forza maggiore di 4. Se penso che, anticipando di poco il periodo, aumenti la probabilità di avere la neve a Firenze, $(A, B) \in \Pi$. Se non so dire se il mare come sopra sia più probabile della neve tra il 10 ed il 20, $(A, C) \notin \Pi$, non per questo penso che, necessariamente, quello stato del mare sia meno probabile della neve tra il 9 e il 19. Avremmo così $(A, B) \in \Pi$, $(A, C) \notin \Pi$ e $(C, B) \notin \Pi$.#

4.5 la distribuzione di probabilità

Una distribuzione di probabilità è una funzione definita in E e con valori reali contenuti nell'intervallo $[0, 1]$,

$$\mu : E \to [0, 1],$$

la probabilità è in ogni caso compresa tra 0 ed 1. Essa deve anche verificare le seguenti proprietà:

1. $\mu(W) = 1$ e $\mu(\emptyset) = 0$;

2. per $(A,B) \in E \times E$,

$$\mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B).$$

$\mu(A \cup B)$ è la probabilità che si verifichi l'evento A o l'evento B, non escluso il caso in cui si verifichino entrambi. Quella che si verifichino sia A che B è indicata con $\mu(A \cap B)$.

La proprietà (**1**) formalizza il fatto che in ogni caso una circostanza si deve necessariamente realizzare, si è allora certi che l'evento $\emptyset$ non potrà mai realizzarsi, la sua probabilità è 0. Allo stesso modo la probabilità che si realizzi una qualunque circostanza, è una certezza: la sua probabilità è 1, $\mu(W) = 1$.

Nella (**2**) si toglie $\mu(A \cap B)$ da $\mu(A) + \mu(B)$ per non contare due volte $A \cap B$ in $\mu(A \cup B)$, una come $\mu(A)$ ed una seconda come $\mu(B)$.

La (**1**) e la (**2**) insieme implicano che

$$\mu(H) + \mu(W/H) = 1$$

la probabilità dell'evento non H, W/H, è 1 meno la probabilità di H. Infatti per $A = H$ e $B = W/H$ si ha che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = W$, in forza della (1) la (2) diventa $\mu(H) + \mu(W/H) = 1$.

Se due eventi A e B sono **incompatibili**, ovvero mutuamente escludentesi, $A \cap B = \emptyset$, la probabilità dell'evento "loro intersezione" è quindi pari a 0, $\mu(A \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$. $\mu(A \cup B)$, sempre con $A \cap B = \emptyset$, è la somma delle probabilità dei due eventi incompatibili. Infatti la (2) diventa $\mu(A) + \mu(B) - \mu(\emptyset) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$. La somma delle probabilità di eventi tra loro incompatibili è la probabilità dell'evento dato dalla loro unione.

Se gli eventi a due a due incompatibili sono in numero finito, la somma delle probabilità di essi è uguale a quella dell'evento loro unione. A questo risultato si arriva procedendo per induzione a partire dal caso di due eventi.

Quando l'evento A è **incluso** nell'evento B, $A \subset B$, se si verifica A siamo certi che anche B si è verificato in quanto ogni circostanza in A appartiene anche a B. In questo caso vale

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Infatti vale in genere, se $A \subset B$,

$$B = A \cup (W/A \cap B)$$

e facendo $C = W/A \cap B$, la parte di B che non sta in A, abbiamo

$$\mu(A) + \mu(C) = \mu(B)$$

e quindi, siccome in genere $\mu(H) \geq 0$, abbiamo $\mu(C) \geq 0$ e quindi $\mu(A) \leq \mu(B)$.

La distribuzione di probabilità μ è **coerente** con la relazione di più probabile Π qualora valga:

$$\mu(A) < \mu(B) \Rightarrow (A,B) \in \Pi.$$

Se la probabilità attribuita all'evento B è maggiore di quella attribuita all'evento A allora l'evento B deve essere giudicato più probabile dell'evento A, $(A,B) \in \Pi$. $\mu(A) < \mu(B) \Rightarrow (A,B) \in \Pi$ equivale a

$$(A,B) \notin \Pi \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(B).$$

La coerenza di μ con Π non esclude che possa essere

$$\mu(A) = \mu(B) \wedge (A,B) \in \Pi.$$

Resta invece escluso che possa essere $\mu(A) > \mu(B) \wedge (A,B) \in \Pi$. In questo caso infatti $\mu(A) > \mu(B)$ implica che $(B,A) \in \Pi$ per cui si deve escludere, per la antisimmetria di Π, che $(A,B) \in \Pi$.

Possiamo concludere che, valendo la coerenza, i confronti della probabilità indotti dalla μ sono meno fini di quelli rappresentati nella Π.

Più forte della coerenza è la **rappresentazione** di Π con μ, del tutto analoga alla rappresentazione delle preferenze con una funzione di utilità, quando vale

$$(A,B) \in \Pi \Leftrightarrow \mu(A) < \mu(B).$$

Non solo $\mu(A) < \mu(B)$ implica che $(A,B) \in \Pi$ ma vale anche l'inverso: se B è giudicato più probabile di A, $(A,B) \in \Pi$, allora la probabilità attribuita a B, $\mu(B)$, sarà maggiore di qualla attribuita ad A, $\mu(A)$, $\mu(A) < \mu(B)$. Per avere una tale rappresentazione la relazione di più probabile, già lo si è visto per utilità e preferenze, deve essere **completa**.

4.6 le conseguenze delle azioni

Gli individui hanno delle preferenze definite sulle conseguenze che le loro azioni contribuiscono a determinare. Siano quindi interessati a sapere quando, in quali circostanze, una certa azione porta a certe conseguenze.

Utilizzando la funzione $f(a,w) = c$, che mette in relazione conseguenze e azioni con le circostanze, possiamo definire

$$W(a,c) = \{w \in W : f(a,w) = c\},$$

l'insieme delle circostanze che, con l'azione complessiva $a \in A$, portano alla conseguenza $c \in C$.

Abbiamo in tal modo definito una funzione in $A \times C$ con valori in 2^W.

Diciamo che **il soggetto conosce gli effetti delle azioni** se

$$(a,c) \in A \times C \Rightarrow W(a,c) \in E.$$

Il soggetto, avendo osservato l'azione complessiva a ed una conseguenza c, ne deduce che deve essersi verificata una circostanza nel sottoinsieme $W(a,c)$ di W, in questo caso $W(a,c) \in E$.

Se $W(a,c) \in E$ vuol dire che il soggetto è in grado di sapere quale è stata la azione complessiva $a \in A$ e quale ne è stata la conseguenza $c \in C$. Solo in questo caso è possibile stabilire dei giudizi di probabilità, che in ogni caso sono riferiti ad eventi, sulle conseguenze delle diverse azioni.

Se vale

$$(W(a,c'),W(a,c''))\in\Pi,$$

il soggetto stima che con l'azione complessiva a è più probabile che si realizzi la conseguenza c'' anziché la conseguenza c'. Se

$$(W(a',c),W(a'',c))\in\Pi$$

vuol dire che l'effetto c si ritiene che sia ottenuto più facilmente con l'azione a'' anziché con la a'.

Quando invece il soggetto non conosce l'effetto delle azioni, può accadere che egli non sia in grado di conoscere, in tutti i casi, l'azione che è stata compiuta, ed anche che, pur conoscendo questa, egli non necessariamente sia in grado di sapere quale è stata la conseguenza. Può essere che egli non sappia distinguere se la conseguenza di a sia stata c' oppure c''.

Esempio 1. So la conseguenza, una certa squadra ha vinto una certa partita, ma posso non sapere di quale azione questa sia la conseguenza. Ad esempio non so se qualcuno ha pagato un giocatore della squadra perdente perché aiutasse a perdere, azione a', oppure se tutti hanno giocato lealmente, azione a''.

Esempio 2. Uno ha fatto una manovra azzardata, azione a, ma non sono riuscito a sapere cosa è successo a chi è stato vittima dell'incidente. Ignoro la conseguenza.#

Solo quando il soggetto conosce l'effetto delle azioni, ed è definita la funzione di probabilità sugli eventi, è definita anche $\mu(W(a,c))$, la probabilità che facendo a si verifichi c. Possiamo rappresentare con $\mu(a,c)$ la $\mu(W(a,c))$.

Quando $(a,c)\in A\times C\Rightarrow W(a,c)\in E$ e supponiamo che con certezza si realizzi un delle possibili conseguenze, abbiamo che

$$\{W(a,c):c\in C\}$$

è una partizione di W, ogni circostanza produce, data la azione a, una specifica conseguenza e la stessa circostanza non può generare conseguenze diverse. Se le conseguenze sono in numero finito, quindi lo è anche $\{W(a,c):c\in C\}$, per le proprietà della μ, abbiamo che vale

$$\sum_{c\in C}\mu(a,c)=1.$$

Una diversa azione, diciamo a', indurrebbe una diversa partizione di W, la

$$\{W(a',c):c\in C\}$$

con ancora $\sum_{c\in C}\mu(a',c)=1$. In generale le due distribuzioni di probabilità non coincidono, le diverse azioni hanno allora conseguenze, in questo senso, diverse.

Quando questo è il caso possiamo concepire l'azione $\overline{a}$ come un modo per garantirsi una particolare distribuzione

$$\mu(\overline{a}) =: \{\mu(\overline{a}, c) |\ c \in C\}$$

di probabilità sulle conseguenze, ovvero i valori assunti dalla distribuzione di probabilità $\mu(\overline{a}, c)$, concepita come una funzione unicamente di $c \in C$. In questo caso giudicare un'azione a'' migliore di a' equivale a preferire la distribuzione di probabilità sulle conseguenze garantita da a'' rispetto a quella garantita da a'.

Un caso particolare è quello in cui le conseguenze sono indipendenti dalle azioni: $\mu(a, c)$ è una funzione costante rispetto ad $a \in A$, mentre cambia al variare di c. In questo caso possiamo scrivere $\mu(a, c) = \mu(c)$. La probabilità delle conseguenze non dipende dalle azioni.

Un caso estremo è quello in cui $\mu(a, c)$ sia funzione costante sia di a che di c. Tutte le conseguenze hanno la stessa probabilità indipendentemente dall'azione.

Per poter disporre della funzione $\mu(a, c)$ a rigore non abbiamo bisogno di saper granchè circa le circostanze che entrano in $W(a, c)$, basta concepire $W(a, c)$ semplicemente come i casi in cui, facendo a, si ottiene c senza bisogno di sapere qualcosa di più circa le circostanze che entrano in $W(a, c)$. Spesso accontentarsi soltanto di ciò rappresenterebbe una grave limitazione della conoscenza con importanti implicazioni e che sarebbe importante superare.

Immaginiamo il caso di una emergenza medica in cui la somministrazione di un certo farmaco, azione a, ha come conseguenza in 9 casi su 10 la guarigione, conseguenza c', e nei restanti la morte del paziente, conseguenza c''. Quindi $\mu(a, c') = 9/10$ e $\mu(a, c'') = 1/10$. Sarebbe davvero importante venire a sapere che la differenza nelle conseguenze dipende dalla presenza nell'organismo del paziente di un certo enzima che appunto è presente in 9 casi su 10. Sapendolo capiremmo la ragione del diverso esito e magari riusciremmo a sapere prima di somministrare il farmaco se questo enzima è presente o meno, o almeno di indirizzare la ricerca al fine di saperlo.

Quando non si è certi di conoscere tutte le possibili conseguenze si potrebbe ampliare l'insieme delle conseguenze aggiungendo la categoria delle "altre conseguenze" in aggiunta a quelle di cui si è in grado di dare una esatta specificazione. Tuttavia questo accorgimento non pare soddisfacente perché se non si è in grado di precisare con accuratezza la conseguenza non possiamo nemmeno avere delle preferenze sulle conseguenze.

5 Dalle preferenze sulle conseguenze a quelle sulle azioni

Ipotizziamo che ogni soggetto definisca una sua relazione di preferenza direttamente sulle conseguenze. P^i indica la relazione di **preferenza sulle conseguenze** del soggetto i,

$$P^i \subset C \times C.$$

$(x, y) \in P^i$si legge, "*il soggetto i preferisce la conseguenza y alla conseguenza x*": se al soggetto fosse garantita la conseguenza x ma gli fosse proposto di rinunciarvi per avere y, egli accetterebbe.

I soggetti, di norma, mentre hanno delle preferenze sulle conseguenze, possono solo scegliere tra azioni il cui risultato è incerto. L'incertezza, se per il momento prescindiamo dalla incertezza sulle azioni altrui, è dovuta alla mancata certezza sulle circostanze che finiranno col realizzarsi e determineranno conseguenze diverse per una stessa azione.

Il problema è quindi quello di dover scegliere l'azione da compiere tenendo conto dell'incertezza sulle sue conseguenze.

Ci servono quindi delle preferenze sulle azioni, è tra queste che dobbiamo scegliere, quando per noi contano le conseguenze: è solo su queste che, inizialmente, abbiamo delle preferenze.

Nell'elaborare le preferenze sulle azioni contano sia le preferenze sulle conseguenze che i giudizi di probabilità sugli eventi che possono verificarsi.

Un'azione può essere, in certo senso, assimilata all'acquisto di un biglietto di una lotteria i cui premi sono gli elementi di C, l'insieme delle conseguenze. Un'azione diversa equivarrebbe ad acquistare un biglietto di una lotteria con gli stessi premi e che si distingue dalla prima solo per eventuali cambiamenti nelle probabilità di ottenerli. Nel caso esista una funzione di distribuzione di probabilità sulle conseguenze, la probabilità di ottenere c facendo l'azione a è data da $\mu(a, c)$.

Indichiamo con

$$Q \subset A \times A$$

le **preferenze sulle azioni**.

Le preferenze sulle azioni dipendono dalle preferenze sulle conseguenze e dai giudizi di probabilità. Q sarà una funzione, $\phi(P, \Pi)$, delle preferenze sugli esiti, P, e della relazione di più probabile sugli eventi, Π,

$$Q = \phi(P, \Pi).$$

Q sarà tuttavia funzione anche di altri fattori tra i quali l'incertezza circa i giudizi di probabilità.

Per il momento facciamo il caso in cui vi sia un solo soggetto, in questo caso a coincide con l'azione dell'unico soggetto.

5.1 utilità attesa e valore atteso

Qualora la relazione di più probabile Π sia rappresentabile mediante una distribuzione di probabilità μ ed il soggetto conosca, nel senso che abbiamo precisato, le conseguenze delle sue azioni, abbiamo che la μ è una funzione i cui valori

$$\mu(a, c) \in [0, 1] \quad sono \quad definiti \quad per \quad ogni \quad (a, c) \in A \times C.$$

Supponiamo anche che la relazione di preferenza sulle conseguenze, la P, sia rappresentabile mediante una funzione di utilità u. In questo caso sappiamo già che qualsiasi trasformazione monotonica crescente della u rappresenta ancora le preferenze P. Possiamo allora indicare con

$$U(P)$$

l'insieme delle funzioni di utilità che rappresentano la P.

Se valgano alcune particolari proprietà sulla Q, è possibile ottenere una specifica **funzione di utilità attesa** *(di Von Neumann),* la V, che sia una funzione di utilità definita direttamente sulle azioni e che rappresenti la Q. Valga cioè

$$V(a') < V(a'') \Leftrightarrow (a', a'') \in Q.$$

Tale funzione,

$$V : A \rightarrow \Re,$$

è tale che

$$V(a) =: \int_c \mu(a, c) u(c),$$

dove il simbolo di integrale $\int_c$ sta ad indicare che si sommano i prodotti $\mu(a, c)u(c)$ per ogni $c \in C$ e la $u \in U(P)$ viene scelta in modo che valga $V(a') < V(a'') \Leftrightarrow (a', a'') \in Q$.

Siccome facendo una certa azione è certo, quindi ha probabilità 1, che una delle possibili conseguenze si realizza, sommando le probabilità delle diverse conseguenze si deve avere somma pari ad 1: deve essere in ogni caso

$$\int_c \mu(a, c) = 1.$$

$V(a)$ viene definita come l'**utilità attesa** della azione a: ovviamente tra due azioni con utilità attesa diversa è preferita quella con utilità attesa più elevata.

Qualora la μ cambi, $V(a)$ cambia. Questo cambiamento è dovuto soltanto al cambiamento di μ mentre la funzione $u \in U(P)$ resta inalterata. In altri termini, sono cambiate le probabilità degli eventi incerti, ma non l'utilità che essi, una volta verificatisi, generano: nella funzione di utilità attesa i pesi μ sono cambiati.

Se l'azione a° ha un esisto certo, c°, sarà $\mu(a^\circ, c) = 0$ per $c \neq c^\circ$ e $\mu(a^\circ, c^\circ) = 1$. Quindi

$$V(a^\circ) = \int_c \mu(a^\circ, c) u(c) = \mu(a^\circ, c^\circ) u(c^\circ) = u(c^\circ).$$

L'utilità attesa coincide con l'utilità della conseguenza certa.

La $V(a)$ è funzione sia della distribuzione di probabilità $\mu(a, c)$ che della funzione di utilità sulle conseguenze $u(c)$ e deve rappresentare le preferenze Q del soggetto sulle azioni. Per ottenere ciò bisogna scegliere, tra le funzioni di utilità sulle conseguenze, quelle in $U(P)$, che sappiamo essere molte, che rappresentano la stessa relazione P di preferenza sulle conseguenze, quella per cui la $V(a)$ rappresenti proprio quelle preferenze Q sulle azioni che la V deve rappresentare.

Se a' e a'' sono due azioni in A si può pensare ad una **azione mista** che consiste nello stabilire con quale probabilità faremo a', π, e quindi a'', $1-\pi$, con $0<\pi<1$. Indichiamo con

$$((a', \pi), (a'', 1-\pi))$$

questa azione mista.

La probabilità di avere la conseguenza $c \in C$ con l'azione mista $((a', \pi), (a'', 1-\pi))$ è data dalla probabilità di avere c con la azione a', $\mu(a', c)$, per la probabilità di fare l'azione a', π, quindi $\pi\mu(a', c)$, più la probabilità di avere c con la azione a'', $\mu(a'', c)$, per la probabilità di fare l'azione a'', $(1-\pi)$, quindi $(1-\pi)\mu(a'', c)$. La probabilità di ottenere $c \in C$ con $((a', \pi), (a'', 1-\pi))$ è dunque

$$\pi\mu(a', c) + (1-\pi)\mu(a'', c).$$

L'utilità attesa di questa azione mista deve essere

$$\begin{aligned}\int_c [\pi\mu(a', c) + (1-\pi)\mu(a'', c)]\, u(c) &= \pi \int_c \mu(a', c)u(c) + (1-\pi)\int_c \mu(a'', c)u(c) = \\ &= \pi V(a') + (1-\pi)V(a'').\end{aligned}$$

L'utilità attesa dell'azione mista $((a', \pi), (a'', 1-\pi))$, $V(((a', \pi), (a'', 1-\pi)))$, è la somma dei prodotti delle utilità attese delle azioni per la probabilità di fare quelle azioni, $\pi V(a') + (1-\pi)V(a'')$.

Tra le condizioni sulle preferenze relative alle azioni che devono valere perché sia possibile costruire la funzione di utilità attesa, la meno plausibile è quella che va sotto il nome di **indipendenza**. Essa stabilisce che:

se a', a'', a° sono azioni in A e l'azione a'' è preferita alla azione a' allora anche l'azione mista $((a^\circ, \pi), (a'', 1-\pi))$ è preferita all'azione mista $((a^\circ, \pi), (a', 1-\pi))$.

5.2 valore atteso e utilità attesa di una lotteria

Se le conseguenze sono delle somme di denaro, in questo caso l'azione è concepita come la partecipazione ad una lotteria, è possibile definire il concetto di **valore atteso** dell'azione $a \in A$, ovvero la somma di denaro che in media ci si attende di ricavare dall'azione stessa. Formalmente essa si definisce come

$$E(a) =: \int_{c \in C} \mu(a, c)c.$$

Si sommano, per ogni c, c è ora una somma di denaro, i prodotti tra c e la probabilità $\mu(a, c)$ di ottenere c scegliendo a.

L'utilità attesa della azione (lotteria) a è invece:

$$V(a) = \int_{c \in C} \mu(a, c)u(c).$$

Quindi la somma delle utilità $u(c)$ delle diverse cifre, le c, per la probabilità, facendo a, di ottenere c, $\mu(a,c)$. Quello che nel valore atteso appare come c nell'utilità attesa diventa $u(c)$. E' questo che rende i due concetti profondamente diversi. Può facilmente accadere che tra due azioni una abbia utilità attesa maggiore pur avendo un valore atteso più piccolo o viceversa.

Se facendo l'azione a° ho una cifra certa m, vuol dire che, in questo caso, $\mu(a^\circ,c)=0$ per $c\neq m$ e $\mu(a^\circ,m)=1$. Sarà quindi $E(a^\circ)=m$ e $V(a^\circ)=u(m)$. Infatti, in questo caso,

$$V(a^\circ)=\int_c \mu(a^\circ,c)u(c)=1\cdot u(m).$$

Analogamente

$$E(a^\circ)=\int_c \mu(a^\circ,c)c=1\cdot m.$$

E' ragionevole supporre che $u(c)$ sia crescente in c, è sempre meglio avere una cifra certa più grande.

Posso confrontare l'utilità della lotteria a, $V(a)=\int_c \mu(a,c)u(c)$, con quella di avere con certezza il valore atteso della lotteria, $E(a)$, $u(E(a))$.

Il segno della differenza tra $V(a)$ e $u(E(a))$,

$$V(a)-u(E(a)),$$

ci dice se il soggetto preferisce la lotteria a o il suo valore atteso ottenuto come cifra certa.

Abbiamo, relativamente alla azione a,

avversione al rischio quando $V(a)-u(E(a))<0$: si preferirebbe avere il valore atteso come cifra certa piuttosto che partecipare alla lotteria;

propensione per il rischio se $V(a)-u(E(a))>0$: è il caso contrario della avversione al rischio. Si preferisce partecipare alla lotteria piuttosto che ricevere il suo valore atteso come cifra certa;

neutralità verso il rischio se $V(a)-u(E(a))=0$: si è indifferenti tra le due alternative.

Cambiando lotteria l'atteggiamento verso il rischio del soggetto può cambiare.

Similare è l'uso del concetto di **equivalente certo** della lotteria a. L'equivalente certo è la radice (soluzione), $e(a)$, dell'equazione in e,

$$V(a)-u(e)=0.$$

L'equivalente certo dell'azione a è la quantità certa di denaro la cui utilità è uguale all'utilità attesa dell'azione a.

Siccome $u(e)$ è funzione crescente di e mentre $V(a)$ resta costante al variare di e, $V(a)-u(e)$ è funzione decrescente di e Per questo la radice, se esiste, deve essere unica. Introducendo ipotesi, per altro molto naturali, di continuità per la u ed altre che garantiscono che la $V(a)-u(e)$ cambi di segno passando da valori di e molto bassi a valori di e molto alti, siamo certi della esistenza della $e(a)$.

Si possono riformulare i concetti di avversione, preferenza e neutralità rispetto al rischio semplicemente confrontando equivalente certo e valore atteso della stessa lotteria. $e(a) - E(a)$ è negativo nella avversione al rischio, positivo con la propensione al rischio, zero nel caso di neutralità.

Se sono avverso al rischio vuol dire che per avere una cifra certa sono disposto a perdere in valore atteso rispetto ad una azione che tale valore atteso non me lo garantisce come certo. L'opposto accade se sono propenso al rischio. Se sono neutrale sono indifferente tra avere il valore atteso come cifra certa o come il risultato di una azione con esito incerto.

5.3 esercizi sull'utilità attesa

a) Abbiamo $c_1 < c_0 < c_2$, c_0 sia una cifra certa che si ottiene con l'azione a°, c_1 e c_2 sono cifre che si ottengono nella azione ad esito incerto a. Abbiamo

$$V(a^\circ) = u(c^\circ)$$

e

$$V(a) = \mu u(c_1) + (1-\mu) u(c_2).$$

$V(a)$ sale al salire di $1-\mu$ ma anche, fermo μ, al salire di $u(c_1)$ e/o di $u(c_2)$. Il danno della perdita, $c_1 - c^\circ$, $u(c_1) - u(c^\circ)$ si riduce, il vantaggio, nel caso di esito favorevole, $c_2 - c^\circ$, $u(c_2) - u(c^\circ)$ sale. Quindi in questo caso $V(a)$ sale anche se μ resta fermo.

Se abbiamo due diversi soggetti di cui il secondo ritiene meno grave la eventuale perdita e più utile l'eventuale guadagno non ci stupiamo se il primo preferisce a° ed il secondo a anche se attribuiscono a μ lo stesso valore. Il secondo soggetto è più propenso, o meno avverso, al rischio del primo.

b) Se faccio un prestito ad un debitore che sono sicuro che pagherà il suo debito pari a c°, dal fargli il prestito, a°, ricavo una utilità pari a $V(a^\circ) = u(c^\circ)$.

Se invece faccio il prestito, azione a, ad un debitore che ha una probabilità $\mu > 0$ di fallire e di non restituirmi il dovuto, siccome $u(0) < u(c^\circ)$,

$$V(a) = \mu u(0) + (1-\mu) u(c^\circ) < V(a^\circ) = u(c^\circ)$$

e quindi preferisco l'azione a° all'azione a.

Per essere indotto a fare il prestito al debitore rischioso devo ottenere, nel caso di restituzione, una cifra più alta, c_1, in modo che diventi

$$V(a) = \mu u(0) + (1-\mu) u(c_1) \geq V(a^\circ) = u(c^\circ).$$

Sono indifferente tra le due azioni quando c è tale che

$$V(a) = \mu u(0) + (1-\mu) u(c) = V(a^\circ) = u(c^\circ).$$

5.4 *atteggiamento verso il rischio e derivata seconda della funzione di utilità

Quando la funzione di utilità delle conseguenze, espresse in quantità di denaro, la $u(c)$, è derivabile almeno fino al secondo ordine, esistono $Du(c)$ e $D^2u(c)$, le derivate prima e seconda.

Dimostriamo che il soggetto è sempre avverso al rischio se, per ogni c, $D^2u(c) < 0$. E' invece propenso al rischio quando, sempre per ogni c, $D^2u(c) > 0$. Per $D^2u(c) = 0$ per ogni c il soggetto è neutrale verso il rischio.

Dim. Iniziamo osservando che per $c^\circ = E(a)$ abbiamo

$$V(a) = \int_c \mu(a,c)\left[u(c^\circ) + u(c) - u(c^\circ)\right] = u(c^\circ) + \int_c \mu(a,c)\left[u(c) - u(c^\circ)\right]$$

Infatti, siccome $\int_c \mu(a,c) = 1$, deve essere $\int_c \mu(a,c)u(c^\circ) = u(c^\circ)$.

Se vale $D^2u(c) < 0$ vuol dire che $Du(c)$ sta scendendo al salire di c. Ma allora se $c > c^\circ$ sarà $Du(c) < Du(c^\circ)$, al contrario per $c < c^\circ$ sarà $Du(c) > Du(c^\circ)$. In generale

$$u(c') - u(c^\circ) = \int_{c^\circ}^{c'} Du(c)\delta c,$$

e nel nostro caso abbiamo, per $c' < c^\circ$,

$$u(c') - u(c^\circ) = \int_{c^\circ}^{c'} Du(c)\delta c = -\int_{c'}^{c^\circ} Du(c)\delta c,$$

siccome nell'intervallo $[c', c^\circ]$ la $Du(c)$ è minima in c° abbiamo

$$\int_{c'}^{c^\circ} Du(c)\delta c > (c^\circ - c')\, Du(c^\circ)$$

e quindi

$$u(c') - u(c^\circ) = -\int_{c'}^{c^\circ} Du(c)\delta c < -(c^\circ - c')\, Du(c^\circ) = (c' - c^\circ)\, Du(c^\circ).$$

Per $c' > c^\circ$, vale ancora

$$u(c') - u(c^\circ) = \int_{c^\circ}^{c'} Du(c)\delta c < \int_{c^\circ}^{c'} Du(c^\circ)\delta c = (c' - c^\circ)\, Du(c^\circ),$$

Quindi in ogni caso, per $c \neq c^\circ$,

$$u(c) - u(c^\circ) < (c - c^\circ)\, Du(c^\circ).$$

Ma allora

$$V(a) = u(c^\circ) + \int_c \mu(a,c)\left[u(c) - u(c^\circ)\right] < u(c^\circ) + \int_c \mu(a,c)\,(c - c^\circ)\, Du(c^\circ).$$

Abbiamo

$$\int_c \mu(a,c)\,(c-c^\circ)\,Du(c^\circ) = Du(c^\circ)\left[\int_c \mu(a,c)c - c^\circ \int_c \mu(a,c)\right],$$

ma siccome $\int_c \mu(a,c) = 1$ e $\int_c \mu(a,c)c = E\,(a) = c^\circ$, deve essere $\int_c \mu(a,c)\,(c-c^\circ)\,Du(c^\circ) = 0$ e quindi

$$V\,(a) < u(c^\circ) = u\,(E\,(a))\,.$$

Il soggetto è avverso al rischio.

Analogamente, se vale $D^2u(c) > 0$, deve essere, per $c' \neq c^\circ$,

$$u(c') - u(c^\circ) > (c' - c^\circ)\,Du(c^\circ)$$

da cui

$$V\,(a) > u(c^\circ) = u\,(E\,(a))\,.$$

Il soggetto è propenso al rischio.

Se infine, $D^2u(c) = 0$ per ogni c, vale per $c' \neq c^\circ$,

$$u(c') = u(c^\circ) + (c' - c^\circ)\,Du(c^\circ)$$

e quindi

$$V\,(a) = u(c^\circ) = u\,(E\,(a))\,,$$

il soggetto è indifferente al rischio.#

5.5 *il contratto di assicurazione

Nel contratto di assicurazione abbiamo da una parte il possibile assicurato, dall'altra la compagnia di assicurazione.

Il possibile assicurato si trova inizialmente in una situazione di rischio, può verificarsi un evento per lui dannoso, $H \in E$, o non verificarsi, $CH = W/H$, le conseguenze per lui sono d nel primo caso ed n nel secondo. Per lui $u\,(d) < u\,(n)$. Il soggetto attribuisce probabilità π all'evento dannoso, quindi probabilità $1-\pi$ al fatto che esso non si verifichi. Se non si assicura, azione a°, la sua utilità attesa sarà

$$V\,(a^\circ) = \pi\,u\,(d) + (1-\pi)\;u\,(n)\,.$$

Se si assicura, azione a, egli deve pagare un premio, p, in denaro alla compagnia di assicurazione, ma se si verifica il danno riceve un indennizzo, r, in denaro e quindi, al netto del premio, $r-p$. Se l'evento dannoso si verifica la conseguenza per lui la possiamo indicare con $(d, r-p)$, se non si verifica la conseguenza sarà $(n, -p)$. Quindi l'utilità attesa dell'azione di assicurarsi sarà

$$V\,(a) = \pi\,u\,(d, r-p) + (1-\pi)\;u\,(n, -p)\,.$$

Il soggetto si assicura se e solo se

$$V(a^\circ) < V(a).$$

La convenienza ad assicurarsi si riduce al salire del premio ed al ridursi dell'indennizzo.

Non è detto che le conseguenze dell'evento dannoso siano solo pecuniarie, possono esserci altri fattori di ordine morale e psicologico; si pensi al senso di colpa per non essere riuscito ad evitare l'evento dannoso, alla perdita di un oggetto che era anche un ricordo, allo stato di depressione conseguente al verificarsi dell'evento dannoso. All'opposto, il non verificarsi dell'evento temuto può generare sollievo ed euforia per lo scampato pericolo. Per questo si sono tenuti separati indennizzi e premi dalle altre conseguenze.

Tuttavia, se il danno è puramente pecuniario, e così è anche il risultato dello scampato pericolo, d e n sono cifre di denaro, $d < n$, possiamo scrivere

$$V(a) = \pi\, u(d + r - p) + (1 - \pi)\; u(n - p).$$

Il valore atteso dell'assicurarsi, per il possibile assicurato, sarà

$$E(a) = \pi\; (d + r - p) + (1 - \pi)\; (n - p).$$

Quello di non assicurarsi sarà

$$E(a^\circ) = \pi\, d + (1 - \pi)\; n.$$

Quindi $E(a^\circ) - E(a) = \pi r - p$.

La compagnia di assicurazione si suppone che sia avversa al rischio, quindi realizza il contratto di assicurazione solo se stima che in tal modo il suo valore atteso aumenti. La variazione del suo valore atteso sarà

$$E_a(a) = \pi'(p - r) + (1 - \pi')\, p = p - \pi' r > 0,$$

laddove π' è la stima della compagnia di assicurazione circa la probabilità dell'evento H.

Qualora sia $\pi = \pi'$, avremo

$$\begin{aligned} E(a) &= \pi\; (d + r - p) + (1 - \pi)\; (n - p) = \\ &= \pi\, d + (1 - \pi)\; n + \pi\, r - \; p = E(a^\circ) - E_a(a). \end{aligned}$$

Quindi $E(a) < E(a^\circ)$ e di conseguenza

$$u[E(a)] < u[E(a^\circ)].$$

Se il soggetto preferisce assicurarsi, $V(a^\circ) < V(a)$, deve essere, valendo $u[E(a)] < u[E(a^\circ)]$,

$$V(a^\circ) - u[E(a^\circ)] < V(a) - u[E(a)].$$

Assicurandosi il rischio scompare del tutto se le possibili conseguenze diventano uguali, $d+r-p=n-p$, quindi $d+r=n$. Il costo di ciò è la perdita certa del premio, $-p$. In questo caso

$$V(a)=\pi\,u(d+r-p)+(1-\pi)\;u(n-p)=u(d+r-p)=u(n-p)=u[E(a)]\,,$$

da cui, visto che ora $V(a^{\circ})-u[E(a^{\circ})]<0=V(a)-u[E(a)]$, il soggetto è certamente, nella situazione iniziale, avverso al rischio.

E' ragionevole immaginare il caso in cui il soggetto deve decidere quanto assicurarsi. Il contratto, unitario, che egli può fare sarà $(r-p,-p)$, la prima cifra riguarda il caso in cui l'evento H si verifica, la seconda se questo evento non si verifica. Il soggetto deve decidere la quantità q di questo contratto. Possiamo allora considerare il problema come quello di massimizzare la funzione di q

$$V(q)=\pi\,u(d+qr-qp)+(1-\pi)\;u(n-qp)\,.$$

Facendone la derivata rispetto a q abbiamo

$$\begin{aligned}DV(q) &= \pi\,D_q u(d+qr-qp)+(1-\pi)\;D_q u(n-qp)= \\ &= \pi(r-p)\;Du(d+qr-qp)-p(1-\pi)\;Du(n-qp)\end{aligned}$$

dove la differenza tra $Du(d+qr-qp)$ e $Du(n-qp)$ è dovuta soltanto alla differenza tra $d+qr-qp$ e $n-qp$. Si tenga presente come u sia funzione di una quantità di denaro, diciamo m, che potrà assumere, a seconda dei casi, un valore pari a $d+qr-qp$ o a $n-qp$, e che queste quantità di denaro sono a loro volta funzioni diverse di q. Dobbiamo quindi applicare le regole della derivata di funzione composta per ottenere $DV(q)$.

L'assicurazione è totale se $d+qr-qp$ e $n-qp$ sono uguali, quindi per

$$q'=\frac{n-d}{r}.$$

In questo caso $d+q'r-q'p=n-q'p=t$, t è la quantità di denaro comune in $d+q'r-q'p$ ed in $n-q'p$. Quindi

$$DV(q')=(\pi r-p)\,Du(t)\,.$$

Se $\pi=\pi'$, $DV(q')=(\pi r-p)\,Du(t)<0$. Infatti $\pi r-p<0$ e $Du(t)>0$. Quindi conviene ridurre la q rispetto a q': non conviene assicurarsi totalmente.

Se non ci si assicura per nulla, $q=0$, abbiamo

$$DV(0)=\pi(r-p)\;Du(d)-p(1-\pi)\;Du(n)\,.$$

Sarà $DV(0)>0$ se $Du(d)$ è sufficientemente maggiore di $Du(n)$ così da più che compensare il fatto che $\pi(r-p)\;<p(1-\pi)$.

Qualora la $u(c)$ sia una funzione crescente ma con la concavità rivolta verso il basso, $Du(c)$ scende al salire di c, c'è sempre avversione al rischio, abbiamo

$$Du(c)>0 \quad e \quad D^2u(c)<0,$$

e quindi

$$D^2V(q) = \pi (r-p)^2 \; D^2u(d+qr-qp) + p^2 (1-\pi) \; D^2u(n-qp) < 0.$$

Ma allora, se $DV(0) > 0$, esiste ed è unico un q, q°, con $0 < q^\circ < q'$ per cui la utilità attesa diventa massima.

In queste condizioni, se il soggetto volesse assicurarsi interamente, l'unica ragione sarebbe che $\pi > \pi'$, il soggetto attribuisce alla probabilità dell'evento dannoso che lo riguarda un valore più alto di quello attribuito dalla compagnia di assicurazione, tanto che

$$\pi r - p \geq 0 > \pi' r - p.$$

La compagnia di assicurazione pensa, col contratto, di aumentare il suo valore atteso mentre il suo cliente pensa che essa lo riduca. Può essere che il cliente stia semplicemente sbagliandosi nell'attribuire la probabilità $\pi' > \pi$ all'evento dannoso, è meno informato della compagnia, ma può essere anche il contrario, il cliente conosce meglio della compagnia le particolari circostanze che determinano il rischio che egli sta correndo.

5.6 *lotterie

Il caso del soggetto che partecipa ad una lotteria, lotto, superenalotto, roulette, vede, come nell'assicurazione, la controparte, il banco, aumentare il valore atteso, $\pi r - p < 0$, ma, al contrario di quanto avviene con l'assicurazione, il soggetto si trova inizialmente in uno stato di certezza. La sua funzione di utilità attesa - π è la probabilità di vincere r, q è ancora la quantità di scommessa unitaria che viene fatta - è ora

$$V(q) = \pi \, u(n+qr-qp) + (1-\pi) \; u(n-qp).$$

Il soggetto deve scegliere $q \geq 0$. In questo caso

$$DV(0) = \pi (r-p) \; Du(n) - p(1-\pi) \; Du(n) = [\pi r - p] \, Du(n) < 0.$$

Se

$$D^2V(q) = \pi (r-p)^2 \; D^2u(n+qr-qp) + p^2 (1-\pi) \; D^2u(n-qp) < 0,$$

come accade se il soggetto è avverso al rischio, abbiamo che, per $q > 0$

$$DV(q) < DV(0) < 0,$$

e quindi

$$V(q) < V(0).$$

Al soggetto non conviene giocare.

Di fatto tanti giocano anche sapendo che perdono in valore atteso. Quindi per loro esiste un $q' > 0$ per cui $V(q') > V(0)$. Deve allora esistere, teorema del valor medio, un q'' tale che $q' > q'' > 0$ per cui

$$DV(q'') = \pi(r-p)\ Du(n + q''r - q''p) - p(1-\pi)\ Du(n - q''p) > 0.$$

Siccome $0 < \pi(r-p) < p(1-\pi)$, ciò è possibile solo se

$$Du(n + q''r - q''p) > \ Du(n - q''p).$$

Quindi solo se, almeno per un tratto, $Du(c)$ cresce al salire di c. In quel tratto il soggetto risulta essere amante del rischio.

Sembra difficile che un soggetto sia amante del rischio, $D^2u(c) > 0$, quale sia c. In questo caso infatti egli spingerebbe q fino al suo massimo possibile, quel q per cui egli spende tutto al gioco, $n - q^{\circ\circ}p = 0$, col rischio molto concreto di perdere tutto.

6 *Limiti di applicabilità dell'utilità attesa

6.1 un caso che contraddice l'ipotesi di indipendenza

Torniamo al caso della scommessa. E' abbastanza normale che un soggetto sia interessato a correre piccoli rischi ma preferisca evitare grandi rischi.

Il soggetto ha una cifra iniziale pari ad m°. Se egli fa la scommessa, a', può passare ad avere, se vince, la cifra m'', se perde la cifra m'. La probabilità di perdere sia μ.

Abbiamo di conseguenza due azioni, con a° il soggetto non scommette e quindi ha con certezza m°, con a' fa la scommessa con gli esiti che abbiamo precisato. Immaginiamo ora l'azione mista $((a^\circ, \pi), (a', 1-\pi))$. Possiamo concepire l'azione a° come l'azione mista $((a^\circ, \pi), (a^\circ, 1-\pi))$.

Immaginiamo che il rischio che il soggetto si assumerebbe con la scommessa sia eccessivo per cui il soggetto preferisca a° a a'. Con l'azione mista $((a^\circ, \pi), (a', 1-\pi))$ i possibili esiti sono: m' con probabilità $\mu(1-\pi)$, m'' con probabilità $(1-\mu)(1-\pi)$, m° con probabilità π.

Per π che si avvicina ad 1 diventa sempre meno probabile la perdita, rispetto a m°, rappresentata da m' per cui il rischio che il soggetto correrebbe con l'azione mista diventa sempre minore. Ma a questo punto il soggetto può preferire assumersi questo rischio molto poco probabile invece che evitare qualsiasi rischio. Avremmo quindi

$$(a', a^\circ) \in Q, [((a^\circ, \pi), (a^\circ, 1-\pi)), ((a^\circ, \pi), (a', 1-\pi))] \in Q.$$

La Q indica le preferenze sulle azioni.

Ciò contraddice il requisito di indipendenza, che vorrebbe che sia

$$[((a^\circ, \pi), (a', 1-\pi)), ((a^\circ, \pi), (a^\circ, 1-\pi))] \in Q$$

dato che $(a', a^\circ) \in Q$, richiesto perchè l'utilità attesa possa esistere.

6.2 un caso in cui la probabilità del risultato non esaurisce il problema di scelta

L'introduzione del concetto di utilità attesa comporta altre restrizioni che non sempre sono molto realistiche.

In particolare essa implica l'esistenza di una distribuzione di probabilità e di una funzione di utilità, quindi una relazione di più probabile ed una di preferenza che siano complete. Altre proprietà, a parte la indipendenza che già abbiamo visto può non essere realistica, le trascuriamo, saranno trattate in corsi più approfonditi.

Se esiste la funzione di utilità attesa, a parità di conseguenze e di probabilità di queste, il valore assunto dalla funzione è uguale. Ma non sempre una simile ipotesi è ragionevole: la lotteria sottostante l'utilità attesa può essere di natura alquanto differente e ciò avere peso sulle preferenze. L'esempio che segue chiarisce il punto.

Esempio. Supponiamo di affrontare la scelta tra estrarre una pallina da una urna in cui sappiamo esserci 7 palline nere e 7 bianche oppure da un'urna nella quale sappiamo esserci solo palline bianche o nere, in entrambi i casi se si estrae una pallina nera si pagano 1000, si ricevono 1000 in caso contrario. Nel primo caso la probabilità di vincere è certamente di $1/2$. Nel secondo non sarebbe ragionevole ritenere che vi siano più palline nere o viceversa e quindi ancora la probabilità di vincere è $1/2$. I due casi dovrebbero avere, non solo lo stesso valore atteso, ma anche la stessa utilità attesa se la funzione è definita. Ma questo non è affatto detto, nei due casi vi è una incertezza molto diversa circa la natura della scommessa; chi ama la chiarezza e l'ordine preferirà la prima alternativa, chi ama l'azzardo può essere attirato dalla seconda per il suo carattere doppiamente incerto. L'incertezza riguarda non solo l'esito dell'estrazione ma anche cosa è sottostante alla probabilità dell'esito.

6.3 completezza delle preferenze sulle conseguenze ma incompletezza sulle azioni

Vi sono casi ragionevoli in cui pur in presenza di preferenze complete sulle conseguenze sia ragionevole la mancanza di completezza delle preferenze sulle azioni. Il caso che segue illustra questa possibilità.

Esempio. Ho 1000 azioni Generali e 100 mila euro, x°, sono disposto a comprarne altre 100 solo se il loro prezzo scende sotto i 30 euro. Se compro queste nuove azioni al prezzo p mi ritrovo ad avere 1100 azioni Generali e $100000-100p$ euro, x_p^+. Sarei disposto a vendere 100 delle 1100 se il prezzo sale sopra 35 euro. Vendendo queste azioni ad un prezzo p' mi ritrovo ad avere 1000 azioni Generali e $100000 + 100\,(p' - p)$ euro, $x_{p,p'}$.

Vediamo ora le preferenze se abbiamo

$$30 < p < p' < 35.$$

Avremo

$$\left(x^{\circ}, x_p^{+}\right) \notin Q, \quad \left(x_p^{+}\ , x_{p,p'}\right) \notin Q,$$

visto che $30 < p$ e che $p' < 35$. Tuttavia, siccome $p < p'$, abbiamo

$$\left(x^{\circ}\ , x_{p,p'}\right) \in Q,$$

infatti a parità di Generali abbiamo più euro.

Il fatto di avere, accanto agli euro, azioni Generali può essere concepita come una scommessa il cui esito, ad una data futura, sarà la somma degli euro iniziali più la cifra di denaro che ricaverò vendendo queste azioni. Quanto avremo dipende dal prezzo, incerto, a cui saranno le Generali alla data futura. Quindi gli esiti finali sono cifre di denaro, e su queste ho preferenze complete, preferisco in ogni caso avere più denaro. Per questo x°, x_p^{+} e $x_{p,p'}$ sono concepite come delle scommesse, quindi come delle azioni.

7 Azioni, congetture ed albero delle decisioni

In generale una azione è costituita dalla azione di ciascuno degli individui che rilevano in quel particolare problema. Anche le conseguenze ora riguarderanno tutti i soggetti e saranno specificate precisando la conseguenza per ciascuno.

Una azione (complessiva) sarà rappresentata da

$$a = (a^1, a^2, ..., a^m) \in A = (A^1 \times A^2 \times .... \times A^m),$$

a^i è l'azione del soggetto i, $a^i \in A^i$, dove A^i è l'insieme delle azioni tra cui sceglie il soggetto i, che entra nell'azione complessiva $a = (a^1, a^2, ..., a^m) \in A$.

Se possiamo applicare a tutti l'utilità attesa abbiamo che per ogni azione complessiva

$$a = (a^1, a^2, ..., a^m) \in A = (A^1 \times A^2 \times .... \times A^m)$$

abbiamo l'utilità attesa per ogni soggetto,

$$V(a) = (V_1(a), V_2(a), ...V_m(a)),$$

$V_i(a)$ è l'utilità attesa del soggetto i quando si è realizzata l'azione complessiva a. Normalmente $V_i(a)$ cambia non solo al cambiare della azione del soggetto stesso, la a^i, ma anche al cambiare di quella degli altri.

7.1 quando il soggetto non conosce l'azione degli altri, equilibrio di Nash

Se il soggetto a cui ci riferiamo conoscesse l'azione degli altri determinerebbe la propria azione in modo da massimizzare la sua utilità attesa. Se invece, come ora ipotizziamo, il soggetto deve decidere la sua azione non sapendo quale azione fanno gli altri, ed essendo consapevole del fatto che l'azione per lui più vantaggiosa cambia al cambiare della azione altrui, diventa più difficile stabilire il criterio di scelta della propria azione.

Quando possiamo utilizzare la funzione di utilità attesa per ogni soggetto, ad ogni azione complessiva corrisponde un unico risultato in termini di utilità. In questo caso infatti le circostanze entrano come probabilità degli esiti (conseguenze) nel determinare il valore assunto dalla $V_i(a)$ per ogni soggetto. Naturalmente quando, determinata la $a = (a^1, a^2, ..., a^m) \in A$ abbiamo il verificarsi della circostanza $w \in W$, diventerà certa la conseguenza $f(a, w) = c$ e quindi l'utilità finale per ciascuno, $u_i(c) = u_i(f(a, w))$. Tuttavia il soggetto, non sapendo, al momento di decidere la sua azione, quale evento si è verificato o si verificherà deve regolarsi secondo la $V(a) = V(a^1, a^2, ..., a^m) = (V_1(a), ..., V_i(a), ..., V_m(a))$.

Se nessuno, al momento di decidere la sua azione, conosce la decisione degli altri, siccome queste sono rilevanti per determinare la convenienza delle proprie azioni, ciascuno farà delle congetture circa l'azione degli altri.

La **congettura** del soggetto i sarà espressa da

$$a^{-i} = (a^1, a^2, ..., a^{i-1}, \cdot, a^{i+1}, ..., a^m)$$

Questo soggetto, con queste congetture circa le azioni altrui, determinerà la propria azione massimizzando $V_i(a)$, rispetto alla propria azione a^i con la congettura a^{-i} circa le azioni altrui. Indichiamo con $a_i{}^\circ \left(a^{-i}\right)$ una azione complessiva massimizzante $V_i(a)$ quando il soggetto i abbia le congetture a^{-i}. Quindi $a_i{}^\circ \left(a^{-i}\right)$ è un possibile risultato finale, azione complessiva, secondo i, quando egli fa la congettura a^{-i}.

Qualora il soggetto che elabora la congettura non avesse una funzione di utilità attesa ma soltanto delle preferenze sulle proprie azioni, quando le azioni degli altri sono quelle congetturate, la scelta della sua azione cadrebbe su una azione che sia per lui massimale. Non è detto che essa sia unica e che la scelta di una o di un'altra non incida sul risultato per gli altri.

Se i soggetti sono m, le congetture sono m, una per ogni soggetto. Diciamo che queste congetture sono **coerenti** qualora circa l'azione di ciascuno tutti gli altri abbiano le stesse congetture. Se le congetture sono coerenti esse possono essere rappresentate da una sola azione complessiva $\widehat{a}$ in A. La congettura del soggetto i sarà espressa da $\hat{a}^{-i} = (\hat{a}^1, \hat{a}^2, ..., \hat{a}^{i-1}, \cdot, \hat{a}^{i+1}, ..., \hat{a}^m)$. Ciascuna componente di $\widehat{a}$ rappresenta la congettura comune di tutti gli altri circa l'azione del soggetto a cui la componente si riferisce.

Definizione di equilibrio di Nash. Un sistema di congetture coerenti rappresenta un **equilibrio di Nash** qualora a nessuno convenga comportarsi diversamente da come gli altri hanno congetturato che lui si comporti. Parliamo di equilibrio di Nash **forte** quando trattasi di un equilibrio di Nash nel quale ogni soggetto, cambiando da solo rispetto alla azione che gli altri congetturano per lui, peggiori la sua situazione (e non abbia semplicemente la non convenienza a cambiare).#

Parliamo di **congetture razionali** quando a nessuno conviene comportarsi diversamente da come è previsto che lui si comporti se gli altri si comportano come previsto. Possiamo allora dire che un equilibrio di Nash è un sistema di congetture *coerenti* e *razionali*.

Se $a \in A$ ed il soggetto i, anziché l'azione prevista in a, a^i, compie l'azione $\overline{a}^i$ l'azione complessiva risultante la indichiamo con $a|\overline{a}^i$.

Possiamo allora dire che il sistema di congetture coerenti $\widehat{a}$ è un equilibrio di Nash se per ogni soggetto i abbiamo

$$V_i(\hat{a}) \geq V_i(\hat{a}|a^i)$$

per ogni $a^i \in A^i$. Abbiamo un equilibrio di Nash **forte** se per ogni soggetto i abbiamo

$$V_i(\hat{a}) > V_i(\hat{a}|a^i)$$

per ogni $a^i \in A^i$ tale che $a^i \neq \hat{a}^i$.

Possiamo esprimere questo concetto in termini di preferenze. Il soggetto i ha preferenze sulle azioni complessive, A. Quindi le sue preferenze, Q^i, sono tali che

$$Q^i \subset A \times A.$$

In realtà il nostro soggetto può scegliere soltanto la sua azione facendo una congettura sulle azioni degli altri. Le sue alternative saranno espresse da

$$\left\{a|a'^i|\, a \in A, a'^i \in A^i\right\},$$

dove le componenti di $a|a'^i$ diverse da quella $i-esima$ sono delle congetture del soggetto i, mentre la componente $i-esima$ indica la possibile scelta di i.

$\left\{a|a'^i|\, a \in A, a'^i \in A^i\right\}$ lo posso considerare come un sottoinsieme di A ed indicarlo con $A_i\left(a\right)$.

La scelta di i cadrà su di un massimale in $A_i\left(a\right)$ secondo Q^i. Le preferenze che ora contano sono la restrizione di Q^i a $A_i\left(a\right) \times A_i\left(a\right)$,

$$Q^i \cap A_i\left(a\right) \times A_i\left(a\right).$$

Esse sono quindi condizionate alle congetture del soggetto i circa l'azione degli altri.

Qualora esista un unico equilibrio di Nash, edn, e tutti i soggetti siano in grado di individuarlo e ritengano che anche gli altri lo siano, sembra ragionevole immaginare che proprio quell'edn. venga da tutti congetturato e quindi fornisca un sistema coerente di congetture.

7.2 rappresentazione di un gioco in forma normale ed edn

Possiamo rappresentare la situazione descritta in alcuni casi particolari.

Supponiamo di avere due soggetti soltanto e che sia A^1 che A^2 abbiano un numero finito di elementi, m per A^1 e n per A^2. Supponiamo di avere per entrambi i soggetti la funzione di utilità attesa. Abbiamo quindi per l'azione

$a = (a_1, a_2) \in A^1 \times A^2$ la coppia $(V_1(a), V_2(a))$ che rappresenta il risultato per ciascuno dell'azione complessiva $a \in A^1 \times A^2$.

Se $m = 3$ e $n = 5$ possiamo rappresentare l'insime delle azioni complessiva mediante la seguente matrice avente 3 righe e 5 colonne,

$$\begin{bmatrix} \backslash & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_1^1 & \left(a_1^1, a_2^1\right) & \left(a_1^1, a_2^2\right) & \left(a_1^1, a_2^3\right) & \left(a_1^1, a_2^4\right) & \left(a_1^1, a_2^5\right) \\ a_1^2 & \left(a_1^2, a_2^1\right) & \left(a_1^2, a_2^2\right) & \left(a_1^2, a_2^3\right) & \left(a_1^2, a_2^4\right) & \left(a_1^2, a_2^5\right) \\ a_1^3 & \left(a_1^3, a_2^1\right) & \left(a_1^3, a_2^2\right) & \left(a_1^3, a_2^3\right) & \left(a_1^3, a_2^4\right) & \left(a_1^3, a_2^5\right) \end{bmatrix},$$

questa matrice ha 3×5 caselle, ciascuna delle quali definisce una diversa azione complessiva. Se ora in ciascuna casella mettiamo la coppia delle utilità attese per ciascuno, corrispondente alla azione complessiva a cui la tabella si riferisce, otteniamo

$$\begin{bmatrix} \backslash & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_1^1 & \left(v_1^{1,1}, v_2^{1,1}\right) & \left(v_1^{1,2}, v_2^{1,2}\right) & \left(v_1^{1,3}, v_2^{1,3}\right) & \left(v_1^{1,4}, v_2^{1,4}\right) & \left(v_1^{1,5}, v_2^{1,5}\right) \\ a_1^2 & \left(v_1^{2,1}, v_2^{2,1}\right) & \left(v_1^{2,2}, v_2^{2,2}\right) & \left(v_1^{2,3}, v_2^{2,3}\right) & \left(v_1^{2,4}, v_2^{2,4}\right) & \left(v_1^{2,5}, v_2^{2,5}\right) \\ a_1^3 & \left(v_1^{3,1}, v_2^{3,1}\right) & \left(v_1^{3,2}, v_2^{3,2}\right) & \left(v_1^{3,3}, v_2^{3,3}\right) & \left(v_1^{3,4}, v_2^{3,4}\right) & \left(v_1^{3,5}, v_2^{3,5}\right) \end{bmatrix},$$

dove la coppia $\left(v_1^{i,j}, v_2^{i,j}\right)$ ora indica l'utilità attesa dell'azione complessiva $\left(a_1^i, a_2^j\right)$.

Un esempio numerico può essere il seguente

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} \backslash & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_1^1 & (2,2) & (3,4) & (4,3) & (5,5) & (3,4) \\ a_1^2 & (1,3) & (0,3) & (4,4) & (4,6) & (5,7) \\ a_1^3 & (0,3) & (4,4) & (5,3) & (4,4) & (4,0) \end{bmatrix},$$

bin esso le azioni $\left(a_1^3, a_2^2\right)$, $\left(a_1^1, a_2^4\right)$, $\left(a_1^2, a_2^5\right)$ sono edn di cui edn forti gli ultimi due.

Se i soggetti potessero concordare il da farsi sceglierebbero $\left(a_1^2, a_2^5\right)$. Infatti mentre il soggetto 1 è indifferente tra $\left(a_1^2, a_2^5\right)$ e $\left(a_1^1, a_2^4\right)$, il soggetto 2 potrebbe minacciare di fare a_2^2 qualora il soggetto 1 insistesse a voler fare a_1^1.

Qualora le azioni che può scegliere il soggetto 2 fossero solo le prime due avremmo

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \backslash & a_2^1 & a_2^2 \\ a_1^1 & (2,2) & (3,4) \\ a_1^2 & (1,3) & (0,3) \\ a_1^3 & (0,3) & (4,4) \end{bmatrix},$$

ed avremmo un solo edn in $\left(a_1^3, a_2^2\right)$ e si tratta ora di un edn forte.

Nel caso seguente

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \backslash & a_2^1 & a_2^2 \\ a_1^1 & (3,5) & (3,4) \\ a_1^2 & (1,3) & (0,3) \\ a_1^3 & (0,1) & (4,4) \end{bmatrix},$$

abbiamo due edn $\left(a_1^1, a_2^1\right)$ e $\left(a_1^3, a_2^2\right)$ entrambi forti.

7.3 le difficoltà nel prevedere un edn, la dominanza

Le difficoltà insorgono quando vi sono più edn, come nei casi (1) e (3) e quindi ciascuno non sa con certezza quello che gli altri possono congetturare, o quando, anche con un solo equilibrio, caso (2), non tutti sono sicuri che gli altri siano in grado di individuarlo e quindi su di esso finiscano col regolare le loro congetture.

Nel caso (1) se i due soggetti sono molto accorti si può immaginare che entrambi pensino all'edn $\left(a_1^2, a_2^5\right)$.

Nel caso (3) i due edn favoriscono il soggetto 2 quello $\left(a_1^1, a_2^1\right)$, il soggetto 1 quello $\left(a_1^3, a_2^2\right)$. Se ciascuno pensa a quello a lui più favorevole il risultato sarebbe l'azione $\left(a_1^3, a_2^1\right)$ col risultato molto deludente per entrambi $(0,1)$. Se ciascuno pensa a quello più favorevole all'altro, il risultato sarebbe l'azione $\left(a_1^1, a_2^2\right)$, che non è un edn, col risultato non deludente per entrambi $(3,4)$.

Qualche strumento concettuale può aiutarci per selezionare i possibili esiti. Supponiamo che ad un soggetto non convenga mai fare una certa azione perchè vi sarebbe in ogni caso, quale sia la congettura che egli fa circa l'azione degli altri, una azione diversa più vantaggiosa per lui. In questo caso sembra ragionevole escludere quella azione da quelle che è ragionevole congetturare che lui faccia. Possiamo quindi introdurre la seguente definizione:

Definizione (dominanza fra azioni) Per il soggetto i l'azione $\overline{a}^i$ **domina** l'azione $\overline{\overline{a}}^i$ se egli preferisce, per ogni $a \in A$, $a|\overline{a}^i$ ad $a|\overline{\overline{a}}^i$, ovvero

$$\left(a|\overline{\overline{a}}^i, a|\overline{a}^i\right) \in Q^i.$$

La $\left(a|\overline{\overline{a}}^i, a|\overline{a}^i\right) \in Q^i$ diventa, quando sia definita l'utilità attesa, $V_i(a|\overline{a}^i) > V_i(a|\overline{\overline{a}}^i)$.

In questo caso una azione viene scartata, è dominata, perchè ce n'è un'altra, sempre la stessa quali siano le congetture del soggetto in questione, che risulta migliore per lui. Se gli altri lo capiscono essi nelle loro congetture sul soggetto i escluderanno che egli faccia l'azione dominata. In (1) abbiamo che a_2^4 domina a_2^1 e a_2^3. In (2) abbiamo che a_1^1 domina l'azione a_1^2.

Se una azione è dominata possiamo escluderla dalle azioni possibili. Se $a^i \in A^i$ è dominata possiamo escluderla da A^i. La nuova A^i sarà allora A^i/a^i ed in tal caso non solo A^i ma anche A, come prodotto cartesiano delle azioni di ogni soggetto, ne risulta modificato. Ciò può avere come conseguenza di poter far diventare per altri soggetti dominate delle azioni che prima non lo erano. Abbiamo in tal modo una procedura per scartare via via delle azioni che, allo stadio raggiunto dalla procedura, diventano dominate. Si parla in questo caso di **dominanza iterata**. Quando non vi sono più azioni dominate le azioni rimaste sono le sole che possono entrare in un equilibrio di Nash. Se poi è restata una sola azione essa è certamente un edn, anzi è l'unico possibile edn.

Con la (1) togliendo le azioni dominate abbiamo

$$\begin{array}{cc} \backslash & \begin{matrix} a_2^2 & a_2^4 & a_2^5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (3,4) & (5,5) & (3,4) \\ (0,3) & (4,6) & (5,7) \\ (4,4) & (4,4) & (4,0) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Qui non abbiamo azioni dominate.

Con la (2) togliendo l'azione dominata otteniamo

$$(4) \qquad \begin{array}{cc} \backslash & \begin{matrix} a_2^1 & a_2^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1^1 \\ a_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (2,2) & (3,4) \\ (0,3) & (4,4) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nella (4) la azione a_2^1 è dominata, non lo è nella (2), e togliendola si ottiene

$$(5) \qquad \begin{array}{cc} \backslash & a_2^2 \\ \begin{matrix} a_1^1 \\ a_1^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (3,4) \\ (4,4) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Nella (5) l'azione a_1^1 è dominata e togliendola si ottiene

$$(6) \qquad \begin{array}{cc} \backslash & a_2^2 \\ a_1^3 & \begin{bmatrix} (4,4) \end{bmatrix} \end{array}$$

che è anche l'unico edn della (2). Il passaggio dalla (2) alla (6) avviene per dominanza iterata e passa per la (4) e la (5).

7.4 azioni miste

Già abbiamo incontrato il concetto di azioni miste. Il soggetto può congetturare per un altro soggetto una azione **mista** precisando con quale probabilità egli ritiene che l'altro faccia ciascuna delle sue possibili azioni. Una azione **pura** sarà quella in cui ad una azione è attribuita probabilità 1 mentre alle altre, per forza, è attribuita probabilità 0. In una azione mista a molte azioni può essere attribuita probalità 0 ma ad almeno 2 è attribuita una probabilità positiva. Naturalmente la somma delle probabilità deve essere necessariamente 1.

Esiste il seguente teorema, di cui per altro non diamo la dimostrazione:

Teorema di Nash. Se non esiste un edn costituito da azioni pure, ne esiste certamente uno costituito da azioni miste.

Esempio. Ci sono due soggetti, uno ha un credito che ancora non è riuscito a riscuotere dall'altro. Le loro possibili azioni sono di andare la sera al bar a o al bar b. Il creditore cerca di incontrare il debitore, questi invece di evitarlo. Se il creditore congettura che il debitore vada al bar a con probabilità π, egli andrà in a se $\pi > \frac{1}{2}$, per $\pi < \frac{1}{2}$ andrà in b. Se $\pi = \frac{1}{2}$ sarà indifferente tra andare in a o in b. Se il debitore congettura che il debitore vada al bar a con probabilità π egli andrà in a se $\pi < \frac{1}{2}$, per $\pi > \frac{1}{2}$ andrà in b. Se $\pi = \frac{1}{2}$ sarà indifferente tra andare in a o in b.

Indichiamo con (π_c, π_d) la congettura del creditore, π_d, sul debitore, e con π_c quella del debitore sul creditore.

Se in (π_c, π_d) abbiamo $\pi_d > \frac{1}{2}$ per avere un edn bisogna che sia $(1, \pi_d)$. Ma in questo caso bisognerebbe, per avere un edn, che sia $(1, 0)$, contraddicendo l'ipotesi che $\pi_d > \frac{1}{2}$.

Se in (π_c, π_d) abbiamo $\pi_d < \frac{1}{2}$ per avere un edn bisogna che sia $(0, \pi_d)$. Ma in questo caso bisognerebbe, per avere un edn, che sia $(0, 1)$, contraddicendo l'ipotesi che $\pi_d < \frac{1}{2}$.

Non resta quindi che il caso in cui $\pi_d = \frac{1}{2}$. Ma questo è un edn solo se anche $\pi_d = \frac{1}{2}$.#

7.5 azioni successive ed induzione all'indietro

Spesso le azioni dei diversi soggetti vengono realizzate in tempi successivi. Se coloro a cui tocca scegliere non sono i primi a doverlo fare, essi conoscono l'azione di chi ha scelto in precedenza, mentre sono costretti a congetturare le azioni di chi deve scegliere contemporaneamente a loro e di chi sceglierà successivamente. Chi sceglie per primo sa che chi sceglierà dopo lo farà sapendo cosa egli ha scelto; quindi ne può condizionare la scelta mediante la propria scelta.

Quello che conta non è tanto l'ordine delle scelte quanto che cosa ciascuno sa delle scelte altrui. Ad esempio se abbiamo 3 soggetti che scelgono in ordine successivo ma nessuno dei tre riesce a sapere cosa ha scelto chi dove scegliere prima, ai nostri fini è come se le loro decisioni fossero contemporanee ed indipendenti.

Se la scelta è invece fatta da più soggetti, che concordano tra loro la loro scelta e si vincolano a rispettare l'accordo in modo che l'impegno debba davvero essere rispettato, non solo essi conoscono reciprocamente l'azione di ciascuno, ma la decisione di ciascuno è concordata con quella degli altri. In questo caso possiamo pensare che ad operare la scelta sia il gruppo, secondo le regole di decisione che si è dato, e non ciascun suo componente. Siamo quindi in un caso di preferenze giuridiche. Al più ciascun membro come singolo avrà dovuto in precedenza scegliere se partecipare al gruppo o determinarsi come un singolo, senza concordare con gli altri la propria scelta.

La successione delle decisioni viene rappresentata mediante un **albero delle decisioni:** alla base vi sono le decisioni dei primi che sono chiamati decidere, da questa base, **nodo iniziale,** partono i **rami**, uno per ogni diversa decisione dei primi chiamati a decidere, alla fine di ogni ramo c'è il nodo in cui la decisione spetta a quelli che sono i secondi a dover decidere, la loro decisione viene al termine del ramo che indica quella che è stata la decisione dei primi. Si prosegue per rami e nodi fino all'**ultimo nodo** da cui partono gli ultimi rami. Alla fine di ogni ultimo ramo sappiamo quale è stata la decisione di ciascuno e quindi le conseguenze per tutti espresse eventualmente dalla utilità attesa per ciascuno.

Per prevedere che cosa finirà col succedere in questo caso, conviene partire dall'ultimo nodo. La situazione è del tutto uguale a quella in cui i soggetti devono decidere tutti contemporaneamente, l'unica differenza è che alcuni hanno già deciso e che chi è chiamato ora a decidere già conosce la loro decisione, questa fa quindi parte per lui dei dati del problema. Gli ultimi nodi sono tanti, ciascuno si differenzia per il modo in cui ad esso si è arrivati.

Un caso semplice è quello in cui in ogni ultimo nodo la decisione che finirà per prevalere è unica. In questo caso nel pbenultimo nodo chi in esso deve decidere sa esattamente, se ritiene che il successivo decisore sia razionale, dove la scelta finirà per arrivare, per ogni ramo si conosce come esso proseguirà e quindi, per ogni scelta, come sarà quella successiva e finale. Sarebbe quindi come se il penultimo nodo fosse in realtà quello finale e le decisioni nel penultimo nodo saranno prese come se esso fosse quello finale. Se, tornando indietro, la situazione semplificata che avevamo supposto di avere nell'ultimo nodo si realizza anche nei nodi via via precedenti, ci si ritrova, per **induzione all'indietro**, nel primo nodo in una situazione di scelta contemporanea in una unica fase. Caso questo che già abbiamo discusso.

La procedura che abbiamo descritto è nota col nome di **induzione all'indietro**.

Esempio. Lei deve decidere, primo nodo, se andare al teatro o allo stadio, lui, sapendo dove è andata lei, deve decidere, secondo ed ultimo nodo, se andare al teatro o allo stadio.

I rami finali possono quindi portare: lei e lui al teatro, lei al teatro e lui allo stadio, lei allo stadio e lui al teatro, lei e lui allo stadio. Queste sono anche le possibili conseguenze.

Vediamo le preferenze dei due sulle conseguenze: lei tra tutte le conseguenze preferisce andare con lui al teatro, subito peggiore per lei è andare con lui allo stadio, ancora peggio sarebbe andare da sola al teatro, infine la soluzione tra tutte peggiore sarebbe di andare allo stadio da sola. Lui tra tutte le conseguenze preferisce andare con lei allo stadio, subito peggiore per lui è andare con lei al teatro, ancora peggio sarebbe andare da solo allo stadio, infine la soluzione tra tutte peggiore per lui sarebbe di andare al teatro da solo.

Siccome, quando decide lui, lei ha già scelto, date le preferenze di lui siamo sicuri che lui andrà dove è andata lei.

Lei questo fatto lo capisce, e quindi sa che dove decide di andare verrà anche lui. Ma allora a lei conviene, viste le sue preferenze, andare al teatro. Tutto questo lo capisce anche lui e quindi si prepara ad andare al teatro.

In questo caso conviene essere il primo a decidere. Se l'ordine delle decisioni fosse rovesciato essi finirebbero con l'andare insieme allo stadio, la soluzione tra tutte migliore per lui.

Si potrebbe pensare che lei sia così oblativa verso di lui da andare allo stadio. Nulla di strano, solo che ora le preferenze di lei sarebbero uguali a quelle di lui per i casi in cui essi vanno nello stesso posto.#

Il caso ora discusso ci fornisce l'occasione di precisare quanto segue. In economia si prendono le preferenze come date, non si intende minimamente, e non si vuole, spiegarle psicologicamente. Può essere benissimo che le preferenze siano determinate da sentimenti di generosità verso il prossimo, come, magari troppo spesso, esse sono spiegabili con l'incapacità del portatore delle preferenze di tener conto dei sentimenti degli altri. Egli ha una natura egotica od egoista.

Sarebbe del tutto sbagliato ritenere che il soggetto delle scelte economiche debba, per essere razionale, essere anche egoista.

7.5.1 gioco di entrata

Un primo giocatore deve decidere se aprire un supermercato nella zona A vicino a quello del secondo giocatore che ha anche un secondo supermercato altrove, nella zona B. In un secondo momento il primo giocatore potrebbee decidere di aprire un secondo supermercato nella zona B.

Il secondo giocatore, se il primo decide di aprire il supermercato nella zona A, può reagire abbassando i prezzi, costrigendo l'altro a fare lo stesso e facendolo pentire di avergli voluto fare concorrenza, sperando che non apra il secondo supermercato.

A questo punto il primo deve decidere se aprire il secondo supermercato. Se lo apre il secondo deve decidere se fare anche lì una guerra dei prezzi. In realtà gli conviene non farla, per danneggiare il concorrente danneggerebbe anche sè stesso più di di quanto sarebbe il danno di perdere una parte della clientela, a causa dell'apertura del secondo supermercato, senza dover abbassare i prezzi. In questo caso sia il primo che il secondo supermercato hanno un guadagno, anche se si è ridotto quello del secondo giocatore.

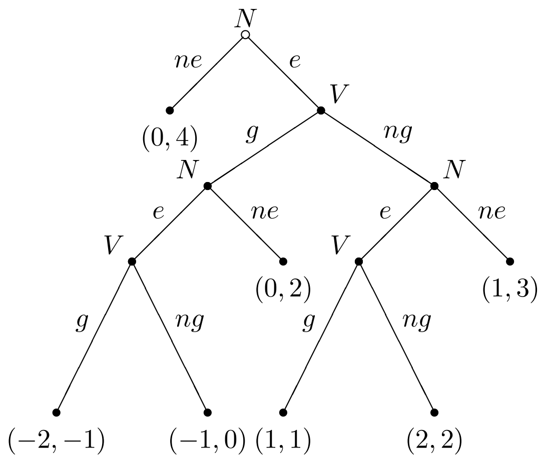

Figura 1.

Ma a questo punto il secondo giocatore capisce che anche facendo la guerra come risposta all'apertura del primo supermercato non riuscirà a dissuadere il primo ad aprire il secondo supermercato. Ma allora gli conviene, anche dopo l'apertura del primo supermercato, non fare la guerra dei prezzi.

Il primo giocatore, capendo questo, ha convenienza ad aprire il primo supermercato.

La minaccia di rispondere all'apertura del supermercato in concorrenza non è una minaccia credibire in quanto per attuarla il minacciante ne avrebbe un danno maggiore di quello che gli verrebbe da semplicemente subire l'entrata del concorrente.

A questo punto può non esserci convenienza per un terzo ad aprire un altro supermercato. Dovendosi dividere per tre la clientela il terzo non ha convenienza ad entrare anche se i primi due non gli fanno concorrenza nei prezzi.

7.5.2 istituzioni e giochi

Regole di decisione diverse possono comportare risultati finali diversi. Molto spesso possiamo concepire regole diverse come dei giochi diversi in cui proprio per questo gli esiti sono diversi.

Immaginiamo una azienda diretta da un direttore D. Egli può gestire il personale in modo rigoroso, r, o in modo indulgente, i. Il direttore ogni 2 anni deve essere confermato o licenziato. Immaginiamo due situazioni istituzionali diverse. Nella prima, I, D viene nominato dai suoi dipendenti; nella seconda, II, dal padrone dell'azienda.

Nel caso I D sa che se è indulgente sarà confermato dai dipendenti, licenziato altrimenti. Gli conviene essere indulgente.

Nel caso II D sa che se è indulgente l'azienda guadagna meno ed il padrone lo licenzia. Gli conviene essere rigoroso.

In questo caso abbiamo due giochi diversi che danno luogo a due edn diversi nei quali vi è uno stesso soggetto, il direttore, che ha nei due giochi le stesse alternative ma si comporta diversamente nei due casi. I risultati sono diversi perchè cambia il secondo soggetto, quello che deve confermare o licenziare il direttore.

La diversità nell'istituzione consiste nel diverso meccanismo previsto per confermare o licenziare il direttore. Il primo gioco è più favorevole ai lavoratori, il secondo al padrone dell'azienda che si può ipotizzare sia lo stesso nei due casi.

8 Le allocazioni

Immaginiamo che l'economia possa essere descritta a partire da un insieme di beni, distinti per caratteristiche fisiche, luogo e data di consegna, ciascuno dei quali sarà caratterizzato da un indice j da 1 a n, $1, 2, ..., n$. Immaginiamo anche che questi beni siano oggetto di diritti di proprietà.

Immaginiamo anche il caso, una evidente forzatura seppure utile per il proseguo dell'analisi, in cui l'insieme delle alternative, X, sia costituito da **allocazioni.** In una allocazione viene precisata la quantità di ciascun bene posseduta da ciascun soggetto. x_j^i indica la quantità del bene j posseduta dal soggetto i. I soggetti dell'economia sono m. Un'allocazione x potrà essere rappresentata attraverso una matrice $n \times m$ le cui colonne, x^i, indicano i beni posseduti, a titolo di proprietà, dal soggetto a cui la colonna si riferisce, il soggetto $i-esimo$. I vettori riga, x_j, uno per ogni bene, nel caso il bene $j - esimo$, hanno m componenti ed indicano la quantità di questo bene posseduta dai diversi soggetti. $x \in \Re^{n \times m}$.

In questo caso l'insieme X di scelta, l'insieme delle alternative, sarà un sottoinsieme di $\Re^{n \times m}$.

Siccome in questo caso i cambiamenti riguardano soltanto i beni di proprietà dei soggetti, l'insieme $M(x,y)$, indicante l'insieme dei soggetti che possono impedire il passaggio dall'allocazione x a quella y, è costituito dagli indici delle colonne che non restano uguali nel passaggio da x ad y. Infatti questi indici segnalano i soggetti che, passando da x a y, vedono cambiare i loro possessi. Avendo su questi beni un diritto di proprietà, i proprietari devono dare il consenso al cambiamento. In conclusione $M(x,y) =: \left\{ i \in M | \quad x^i \neq y^i \right\}$.

Esempio. Vi sono tre soggetti e due beni, sia

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

passando da x ad y il soggetto 1 compra dal soggetto 3 un'unità del primo bene vendendogli un'unità del secondo bene. Il soggetto 2 invece non cambia il proprio vettore di beni. In questo caso dunque

$$M(x,y) = \{1,3\}.\#$$

Se x è un'allocazione, la somma delle sue colonne, $d(x) \in \Re^n$, indica quale è la **disponibilità complessiva** di beni in x,

$$d(x) = \sum_{i=1}^{m} x^i,$$

ovvero il vettore costituito dalla somma delle colonne di x. $d(x)$ descrive la quantità di beni a disposizione dell'economia in corrispondenza di una determinata allocazione x.

Se e è il vettore colonna di m componenti tutte uguali ad uno, allora il vettore colonna $d(x)$ può essere immaginato come il prodotto della matrice x per il vettore e. $d(x)$ rappresenta la dotazione complessiva di beni di questa economia la cui allocazione è x.

$$d(x) = \sum_{i=1}^{m} x^i = xe.$$

Se passando da x ad y la dotazione complessiva d resta ferma, i beni vengono unicamente riallocati fra gli individui, la quantità complessivamente a disposizione non viene modificata. Abbiamo in questo caso uno **scambio** se la riallocazione conviene a tutti i soggetti coinvolti. Una riallocazione potrebbe non essere volontaria. Ad esempio potrebbe essere dovuta al potere dello stato che toglie a qualcuno qualcosa per darlo ad un altro. Un altro esempio può essere il furto, il ladro si appropria di beni che erano del derubato.

La dotazione complessiva d viene modificata dal consumo, i beni vengono distrutti consumandoli, o dalla produzione, i fattori di produzione scompaino mentre i prodotti sono creati.

8.1 preferenze individualistiche

Fino ad ora abbiamo definito le preferenze sull'intero insieme delle alternative X, il che implica che ogni soggetto esprima un interesse per l'intera situazione dell'economia. Questo può valere anche quando si tratta di allocazioni: un soggetto potrebbe infatti essere interessato non solo ai beni in suo possesso ma anche a quelli posseduti da tutti gli altri.

Ad esempio posso essere interessato non solo alla mia automobile ma anche a quelle che hanno gli altri, esse incidono, negativamente, sul mio interesse attraverso il volume del traffico e l'entità dell'inquinamento. Un altro caso è quello dei cellulari; che vi siano molti cellulari è un vantaggio per ogni possessore di cellulare perchè così egli può raggiungere molti altri anche quando non siano reperibili al telefono fisso.

Ci riferiamo a questi casi come ad **esternalità nel consumo**. Nel primo esempio abbiamo una esternalità negativa, nel secondo una positiva.

Diciamo che abbiamo **preferenze individualistiche** quando per il soggetto portatore delle preferenze contano solo i beni che egli possiede. Se X indica l'insieme delle possibili allocazioni, ad ogni elemento $x \in X$ si può associare la sua colonna $i - esima$, x^i, la immagine di X secondo questa funzione sarà l'insieme X^i.

Definizione (preferenze individualistiche) *Le preferenze del soggetto i, P^i, sono individualistiche se*

$$P^i \subset X^i \times X^i.$$

In questo caso i cambiamenti nell'allocazione che non alterano i beni in suo possesso danno luogo ad allocazioni per lui equivalenti. Le preferenze di i possono essere definite unicamente sui beni che egli possiede, nella allocazione x, ovvero dal vettore x^i.

Le preferenze individualistiche presuppongono un atteggiamento dei soggetti tutto rivolto a sé stessi e dimentico della situazione altrui, quindi riflettono la psicologia di un soggetto egoista. Nel seguito ipotizziamo che i soggetti dell'economia abbiano preferenze individualistiche.

8.2 proprietà delle preferenze individualistiche: apertura, non saturazione, monotonicità e convessità

Siccome nel caso che ora stiamo studiando le alternative sono delle allocazioni, e per il singolo soggetto considerato da solo sono dei vettori (colonna) in $\Re^n$, le preferenze possono avere delle proprietà aggiuntive rispetto a quelle già analizzate trattando delle preferenze in generale. In particolare possiamo conferire allo spazio delle alternative una distanza e quindi una topologia metrica.

Definizione (preferenze aperte) *La relazione di preferenza P, definita in $X \subset \Re^n$, è aperta se, qualora sia $(x, y) \in P$, esiste un intorno di x, U_x,* *ed uno di y, U_y, tali che ogni elemento di U_x sia peggiore di ogni elemento di U_y secondo la P. Cioè*

$$(x, y) \in P \Longrightarrow P \supset U_x \times U_y.$$

L'apertura di P significa che se tra due alternative una è migliore dell'altra, lo stesso vale per alternative che siano sufficientemente vicine alle prime due.

L'apertura di P è un'ipotesi ricca di implicazioni.

Osserviamo immediatamente che se le preferenze sono aperte gli stessi insiemi $P(x)$ e $P_-(x)$ contenenti i migliori e, rispettivamente, i peggiori secondo P dell'allocazione x, sono aperti. Infatti se $y \in P(x)$, per l'apertura di P, esiste un intorno di y i cui elementi sono tutti migliori di x. Allo stesso modo si dimostra che $P_-(x)$ è aperto.

Definizione (non saturazione locale) *Le preferenze sono localmente non saturabili se $x \in fr\, P(x)$.*

fr sta per frontiera.

La non saturazione locale significa che in ogni intorno di x esistono elementi appartenenti all'insieme dei migliori di x stesso. Questo implica ovviamente che $P(x) \neq \emptyset$.

Definizione (preferenze non sature) *Le preferenze P non sono saturabili se $P(x) \neq \emptyset$ quale sia $x \in X$.*

La non saturazione implica che non esiste in X un massimale secondo P. E' ovvio che non saturazione locale implica non saturazione.

La non saturazione locale si limita ad indicarci che, dato un elemento x, esiste sempre in ogni intorno di x un elemento migliore di x stesso ma non suggerisce delle direzioni nelle quali conviene muoversi a partire da un generico punto di partenza.

Un'assunzione in proposito è la seguente

Definizione (preferenze monotoniche) *Le preferenze P sono monotoniche se per x e y in X, qualora sia $x \neq y$ e $x \leq y$, tutte le componenti di y sono non minori di quelle di x corrispondenti, ma almeno una componente è diversa, allora,*

$$(x,y) \in P.$$

Con preferenze monotoniche conviene sempre avere quantità maggiori di beni. La monotonicità garantisce che la non saturazione locale sia verificata.

Una ulteriore proprietà spesso ipotizzata è quella di convessità.

Definizione (preferenze convesse) *Le preferenze P sono convesse se lo è, per ogni $x \in X$, $P(x)$.*

In generale $A \subset \Re^n$ è convesso se, per a e b in A e $\lambda \in (0,1)$, vale $\lambda a + (1-\lambda)\, b \in A$.

Se ci limitiamo a considerare preferenze individualistiche complete su allocazioni, esiste un importante teorema, che non dimostriamo, che garantisce l'esistenza di una rappresentazione numerica delle preferenze.

Teorema (funzione di utilità) *Con alternative in* $\Re^n$ e *preferenze **complete, individualistiche*** *ed* ***aperte,*** *esiste una funzione di utilità continua che le rappresenta.*

Se $x \in X$ è una di queste alternative, quelle che sono equivalenti con x costituiscono una **mappa di indifferenza**.

8.3 gli arricchimenti

Siamo sempre nell'ambito delle allocazioni, ma mentre nella sezione precedente ci siamo occupati delle preferenze dei singoli, ora ci mettiamo nell'ottica delle allocazioni, quindi dell'interazione fra più individui in un contesto più particolare di quello in cui abbiamo trattato delle preferenze giuridiche e dei loro massimali.

L'allocazione y ***domina*** *l'allocazione x se $x \neq y$,* e $(x^i, y^i) \in P^i$ *per ogni $i \in M$ tale che $x^i \neq y^i$.*

Quindi non parliamo di dominanza se le due allocazioni sono uguali, per avere dominanza bisogna che almeno un soggetto cambi i suoi possessi. Chi cambia deve salire nelle sue preferenze. Con $D\,(x^\circ)$ indichiamo le allocazioni che dominano l'allocazione x°.

Definizione di arricchimento. *Se l'allocazione y domina l'allocazione x, $y \in D\,(x)$, il vettore $d\,(y) - d\,(x)$, differenza della dotazione complessiva tra y e x, è un **arricchimento** in x.*

L'insieme

$$A\,(x) =: \{d\,(y) - d\,(x) \,|\, y \in D\,(x)\}$$

rappresenta l'insieme degli arricchimenti partendo dall'allocazione x.

Un arricchimento, a partire dall'allocazione x, è una modificazione delle risorse complessivamente disponibili che permette di passare ad una allocazione che domina la x.

In generale la somma di più sottoinsiemi di $\Re^n$ si ottiene sommando i termini del loro prodotto cartesiano. Ad esempio: se voglio sommare Q e K, con $Q \subset \Re^n$ e $K \subset \Re^n$, ottengo $Q + K =: \{q + k| \quad q \in Q, k \in K\}$.

Sia $M\,(x)$ l'insieme dei soggetti non saturi nella allocazione x, quelli per cui $P^i(x^i) \neq \emptyset$. Per $i \in M\,(x)$ l'insieme

$$A^i(x) = P^i(x^i) - x^i,$$

è il sottoinsieme dei cambiamenti di dotazione complessiva che permettono al soggetto $i \in M$ di migliorare la sua situazione, fermi restando tutti gli altri. $A^i(x)$ è l'insieme degli arricchimenti del solo soggetto $i \in M$. Qualora sia

$P^i(x^i) = \emptyset$, il soggetto i è saturo, non ha senso parlare di suoi arricchimenti. Ovviamente

$$A^i(x) \subset \ A\,(x)\,.$$

Se $a \in A\,(x)$, esiste una allocazione y che domina la x e tale che $d\,(y) - d\,(x) = a$. Siccome $y \in D\,(x)$ l'insieme

$$M' = \left\{i \in M | y^i \neq x^i\right\}$$

dei soggetti che, passando dalla allocazione x alla allocazione y, vedono cambiare i beni in loro possesso, è un sottoinsieme di $M\,(x)$.

$$a \in \sum_{i \in M'} \left[P^i(x^i) - x^i\right].$$

Per $M\,(x) \supset M' \neq \emptyset$ definiamo

$$A_{M'}(x) =: \sum_{i \in M'} \left[P^i(x^i) - x^i\right].$$

Ma allora, se $a \in A\,(x)$, deve esistere un M', tale che $M\,(x) \supset M' \neq \emptyset$, per cui

$$a \in A_{M'}(x).$$

Ma

$$A_{M'}(x) \subset \bigcup_{M(x) \supset M'' \neq \emptyset} A_{M'}(x)$$

e quindi

$$A(x) \subset \bigcup_{M(x) \supset M' \neq \emptyset} A_{M'}(x).$$

D'altra parte, se $a \in \bigcup_{M(x) \supset M' \neq \emptyset} A_{M'}(x)$, esiste un M' tale che $M\,(x) \supset M' \neq \emptyset$ e che $a \in A_{M'}(x)$ per cui $a \in A(x)$. Quindi

$$\bigcup_{M(x) \supset M' \neq \emptyset} A_{M'}(x) \subset A(x).$$

Ma allora

$$A(x) = \bigcup_{M(x) \supset M' \neq \emptyset} A_{M'}(x).$$

L'insieme degli arricchimenti in x coincide con l'unione degli $A_{M'}(x)$ per cui $M\,(x) \supset M' \neq \emptyset$.

Il teorema sugli arricchimenti che segue ci dice come costruire in modo molto diretto e semplice $A(x)$ quando valgono la non saturazione locale e l'apertura delle preferenze.

Teorema degli arricchimenti con preferenze aperte e non saturazione locale. Con preferenze aperte e non saturazione locale abbiamo $A(x) = A_M(x)$.

Dim. La non saturazione locale garantisce che tutti i soggetti non sono saturi, quindi che $M(x) = M$, e che in $P^i(x^i)$ esiste un y^i vicino quanto si vuole ad x^i, tale quindi che $\left|y^i - x^i\right|$ sia minore di un qualsiasi prefissato $\delta > 0$.

In ogni caso, per quanto prima dimostrato, $A(x) \supset A_M(x)$.

Se $a \in A(x)$, esiste una allocazione y che domina la x e tale che valga $d(y) - d(x) = a$. Quello che non è garantito, perchè sia anche $a \in A_M(x)$, è che tutti i soggetti migliorino passando da x a y. Sia M° l'insieme dei soggetti che non migliorano passando da x a y. Se $M^\circ = \emptyset$, $a \in A_M(x)$ e siamo a posto. Sia quindi $M^\circ \neq \emptyset$. Per $j \in M^\circ$ vale $y^j = x^j$. Resta quindi da dimostrare che, se $a \in A(x)$, esiste una allocazione y' per tutti migliore della allocazione x e tale che sia ancora $d(y') - d(x) = a$.

Se $l \notin M^\circ$ abbiamo $\left(x^l, y^l\right) \in P^l$, prendiamo ora degli $\eta^j \in P^j(x^j) - x^j$ per ogni $j \in M^\circ$ e modifichiamo y^l in $y'^l = y^l - \sum_{j \in M^\circ} \eta^j$. Si ottiene così una allocazione y' che ha $y'^i = y'^i$ per $i \notin M^\circ$ con $i \neq l$, $y'^j = x^j + \eta^j \in P^j(x^j)$ per $j \in M^\circ$, e $y'^l = y^l - \sum_{j \in M^\circ} \eta^j$. Per la non saturazione locale gli η^j possono essere presi così piccoli da rendere y'^l tanto vicino a y^l da garantire, grazie alla apertura delle preferenze, $\left(x^l, y'^l\right) \in P^l$. Questa y' è l'allocazione che cercavamo, essa garantisce un vantaggio a tutti ed ha $d(y') = d(y)$, di conseguenza, completando la dimostrazione, $d(y') - d(x) = a \in A_M(x)$.#

Nelle condizioni ipotizzate in questo teorema, per ottenere l'insieme degli arricchimenti basta sommare, per tutti i soggetti, quelli che sono gli arricchimenti individuali, gli $P^i(x^i) - x^i$.

8.3.1 scambio e produzione per raggiungere allocazioni dominanti

Quando $0 \in A(x)$ è possibile raggiungere da x un'allocazione dominante attraverso il solo scambio. Esiste infatti in questo caso una allocazione, y, dominante la x, tale che $d(y) - d(x) = 0$. I soggetti che migliorano passando da x a y sono anche i soli che vedono cambiare i beni in loro possesso ed il loro possesso complessivo non cambia. Quindi, a fronte degli acquisti di alcuni, vi sono vendite di altri per lo stesso ammontare complessivo. Questa è condizione necessaria per poter parlare di scambio, l'altra condizione è che chi scambia lo faccia volontariamente, quindi passando in alternative che giudica migliori. Entrambe le condizioni sono, in questo caso, verificate.

Con $S(x^\circ)$ indichiamo le allocazioni dominanti la allocazione iniziale x° che sono **raggiungibili mediante lo scambio**,

$$S(x^\circ) =: \{x| \quad x \in D(x^\circ),\ d(x) = d(x^\circ)\}.$$

Ovviamente quando e solo quando $0 \notin A(x^\circ)$ sarà $S(x^\circ) = \emptyset$.

L'allocazione x può essere stata ottenuta ricorrendo ad un **processo di produzione**. Per individuare questo dobbiamo conoscere la dotazione dell'economia prima di intraprendere il processo di produzione. Indichiamola con d. Con Y indichiamo l'insieme dei processi di produzione tecnicamente possibili. Y è costituito da vettori in $\Re^n$.

La allocazione x è realizzabile a partire da d se $d(x) - d \in Y$, ovvero esiste un processo di produzione possibile che modifica le risorse disponibili da quelle iniziali d a quelle necessarie, $d(x)$, per realizzare la allocazione x.

Si suppone che gli eventuali consumi, che ciascuno decide per conto suo, debbano seguire alla realizzazione della allocazione x. Questi consumi si manifestano in una modificazione, per lo più riduttiva dei possessi, intervenuta nelle disponibilità di ciascun soggetto consumatore. A seguito dei consumi la allocazione cambia da x a $x - c$, le colonne di c indicano i consumi di ogni soggetto, quello che resta di x dopo i consumi è la allocazione $x - c$.

Possiamo indicare con $y(x, d) = d(x) - d \in Y$ il processo di produzione che consente di ottenere la allocazione x a partire da d. Con $G(d)$ indichiamo le allocazioni realizzabili con disponibilità complessive iniziali d mediante un processo di produzione tecnicamente possibile,

$$G(d, Y) =: \{x| \quad d(x) - d \in Y\}.$$

Siccome inizialmente siamo in ogni caso in una allocazione, x°, le allocazioni che di fatto potranno essere raggiunte, mediante la produzione, partendo da x° saranno solo quelle in $G(d, Y) = G(d(x^\circ), Y)$. Vi è interesse a raggiungere quelle in $G(d(x^\circ), Y)$ che dominano quella iniziale, x°: quelle in $G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)$ sono le **allocazioni dominanti raggiungibili con la produzione** a partire dalla allocazione x°.

Considerando sia le possibilità offerte dalla produzione che quelle offerte dallo scambio le **allocazioni raggiungibili** a partire da x° saranno quelle in

$$\{G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)\} \cup S(x^\circ).$$

Sarà frequente il caso in cui, dopo un cambiamento di allocazione dovuto alla produzione, segue un cambiamento ulteriore dovuto allo scambio. Ma non è da escludersi che i due cambiamenti si sommino in un unico cambiamento che coinvolge contemporaneamente produzione e scambio.

Se $0 \in Y$, tutte le allocazioni raggiungibili con lo scambio lo sono anche con la produzione, quindi

$$\{G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)\} \supset S(x^\circ).$$

Una allocazione x° sarà detta **ottimale globalmente** se

$$\{G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)\} \cup S(x^\circ) = \emptyset,$$

non è possibile lasciarla per una che la domini e che sia raggiungibile con lo scambio o con la produzione. Diciamo che l'allocazione x° è **ottimale di scambio** se $S(x^\circ) = \emptyset$.

Introducendo la nozione di arricchimento, nel contesto delle allocazioni e delle preferenze individualistiche, diventa possibile caratterizzare gli ottimi attraverso questo strumento sintetico in cui le preferenze non appaiono più in modo esplicito.

8.4 la nozione di invidia

Sebbene ci siamo limitati a considerare preferenze individualistiche introduciamo ora un concetto che pone a confronto i vantaggi che differenti soggetti ottengono in un'allocazione. Possiamo esprimere tale concetto come **invidia** secondo la seguente definizione.

In una allocazione x è presente invidia se esiste una coppia di soggetti i e j tali che i preferirebbe avere i beni che ha j rispetto a quelli previsti per lui in x, ma j non ha interesse a fare lo scambio. Diciamo che in y vi è ***assenza di invidia*** *qualora nessuno vorrebbe fare questo tipo di cambio con qualcun altro.*

Se x è una allocazione, e ne precisiamo le colonne scrivendo $\left(x^1, x^2, .., x^m\right)$, possiamo scrivere con $\left(x^1, x^2, .., x^m\right)_{ij}$ la allocazione in cui la colonna $i-esima$ è ora quella che era la $j-esima$ in x mentre quella $j-esima$ è ora quella che era la $i-esima$ in x. Perché i invidii j bisogna che $\left(x^i, x^j\right) \in P^i$ e che $\left(x^j, x^i\right) \notin P^j$. Qualora fosse $\left(x^i, x^j\right) \in P^i$ e $\left(x^j, x^i\right) \in P^j$ ai due soggetti converrebbe scambiarsi i possessi realizzando uno scambio, non avrebbe senso parlare di invidia.

Si noti come l'invidia di cui stiamo parlando esprime una situazione ben diversa da quella della normale invidia in cui l'invidioso semplicemente trae piacere dal danno altrui, anche se questo non gli porta nessun immediato vantaggio.

Se le colonne di x sono tutte uguali, un'allocazione egualitaria, abbiamo un caso, banale, di assenza di invidia. Solitamente un'allocazione egualitaria non rappresenta un ottimo. Il problema è piuttosto quello di sapere se esistono ottimi con assenza di invidia.

Spesso si propaganda la giustizia sociale e la solidarietà come dovere morale. Volendo realizzare di fatto una situazione simile, qualcuno potrebbe predicare l'opportunità di introdurre una legge per la quale chiunque possa andare da un altro a dargli i beni che possiede per prendere i beni in suo possesso. Il risultato finale, ammettendo lo scambio, sarebbe il raggiungimento di un ottimo globale con assenza di invidia come eventuale posizione finale. Una forma quindi di giustizia che non necessariamente richiede che tutti abbiano gli stessi beni: diversità di preferenze porta a possessi diversi pur in assenza di invidia.

Una normativa di questo genere potrebbe anche aver senso qualora la distribuzione dei beni esistenti tra i diversi soggetti (allocazione iniziale) fosse casuale, allora tale normativa servirebbe a rimediare alle ingiustizie del caso. Ma tanto varrebbe stabilire una distribuzione iniziale egualitaria e poi permettere tutti i riaggiustamenti ottenibili mediante scambi. Sarebbe invece ingiusta qualora la distribuzione iniziale fosse il frutto di precedenti sacrifici o di imprevidenze. Chi ha più beni ora può essere che abbia fatto dei sacrifici in passato che invece, chi si ritrova povero ora, ha preferito non fare. Ammettendo a questo punto dei cambi nei possessi a danno dei più ricchi ed a favore dei più poveri non si farebbe a cambio dei passati sacrifici. Da qui l'ingiustizia. Chi si trova ora avvantaggiato potrebbe esserlo non in conseguenza di maggiori sacrifici ma di una maggiore oculatezza nell'investire il suo risparmio. Ammettere in questo caso il cambio nei possessi sarebbe un disincentivo ad investire in modo oculato.

Si potrebbe allora predicare l'uguaglianza delle posizioni di partenza. Se questo vuol dire che tutti i bambini devono avere lo stesso trattamento, sarebbe scoraggiato l'impegno della famiglia verso i figli e sarebbe una ingiustizia verso le famiglie più assennate che con i sacrifici del passato hanno precostituito le condizioni affinché i loro figli possano crescere in condizioni più favorevoli.

Una esasperazione dell'ideale di giustizia dovrebbe poi penalizzare chi nasce favorito dalla natura, per intelligenza, bellezza, salute, per premiare chi invece al contrario nasce svantaggiato.

Siccome è davvero difficile separare con accuratezza i meriti dal caso, è ragionevole che una società moderna si preoccupi sia di incoraggiare i comportamenti virtuosi che di correggere eccessive differenze di ricchezza tra i suoi diversi componenti.

9 I prezzi

Di solito chi si occupa di economia ed osserva quello che succede nelle nostre economie, dà molta importanza ai prezzi. In buona misura questa importanza è non solo eccessiva ma fuorviante. Anche per far vedere che si può fare spesso a meno dei prezzi costruendo la teoria economica, non li abbiamo fino ad ora introdotti.

9.1 contratti e prezzi

Di fatto i prezzi rappresentano le modalità con cui si realizzano certi particolari scambi. In questi il compratore ottiene una unità di un particolare bene cedendo al venditore una certa quantità di moneta, il prezzo del bene. La moneta è uno tra i beni dell'economia il quale, per certe ragioni, intrinseche e storiche, ha finito col diventare la contropartita abituale negli scambi. La controparte espressa da denaro (moneta) è certamente la norma nei piccoli scambi; chi va al supermercato compra pagando in moneta. Il trasferimento di moneta al venditore può prendere la forma del trasferimento di disponibilità del compratore presso il sistema bancario, nella forma di un assegno o con l'utilizzo della carta di credito.

Sarebbe tuttavia errato supporre che anche gli scambi importanti debbano avere come controparte il denaro. Anzi se questo fosse imposto per legge vi sarebbe una perdita di ricchezza: scambi che potrebbero realizzarsi sarebbero impediti senza che nessuno si avvantaggi per questo divieto. Dimostrare ciò richiede un contro esempio. Eccolo.

Esempio. Il soggetto 1 ha una bella villa che sarebbe disposto a cedere per avere un certo quadro di Picasso, se dovessero pagarlo in denaro vorrebbe per la villa almeno 3 miliardi. Il soggetto 2 vorrebbe la villa ma non è disposto a pagarla più di 2 miliardi. Il soggetto 3 ha il Picasso e sarebbe disposto a venderlo per più di un miliardo e mezzo.

Uno scambio conveniente per tutti potrebbe essere quello per cui alla fine 1 ha il Picasso, 2 la villa e 3 1,7 miliardi.#

Se pretendessimo che gli scambi avvengano soltanto tra coppie, venditore e compratore (il compratore si distingue dal venditore solo perché lui cede denaro mentre il compratore lo riceve), lo scambio dell'esempio non potrebbe realizzarsi.

Se abbiamo n beni per i quali abbia senso parlare di loro quantità, sono quindi beni riproducibili e standardizzati, possiamo parlare di sistema di prezzi riferito a tali beni. Il vettore $p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in \Re^n$ indica, nella sua componente generica $i - esima$, p_i, la quantità di denaro che bisogna cedere per acquistare 1 unità del bene i. Tra questi beni c'è il bene moneta, sia il bene $n - esimo$, il suo prezzo deve essere 1. Quindi $p = (p_1, p_2, ..., 1)$.

Un acquisto $c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \Re^n$, dove deve essere $c_i \geq 0$ per $i < n$, è possibile a quei prezzi p se vale, trattando c come un vettore riga e p come un vettore colonna, $cp = 0$. Scrivendo in forma distesa abbiamo $cp = c_1p_1 + c_2p_2 + ... + c_n = 0$, da cui $c_1p_1 + c_2p_2 + ... + c_{n-1}p_{n-1} = -c_n$. $-c_n \geq 0$ indica la spesa per l'acquisto dei primi $n - 1$ beni.

Qui sopra abbiamo dovuto specificare la posizione del soggetto come compratore dei beni e pagatore in moneta, di norma infatti non è possibile da potenziale compratore trasformarsi in potenziale venditore pensando di poterlo fare agli stessi prezzi.

Su mercati particolarmente sofisticati vi sono degli operatori specializzati, gli intermediari specialisti, che specificano, per i beni che trattano, un prezzo al quale comprano (prezzo denaro) ed uno al quale vendono (prezzo lettera). Il cliente sceglie se vuole essere compratore o venditore.

Abbiamo allora due vettori di prezzi, quello dei prezzi denaro,

$$p^d = \left(p_1^d, p_2^d, ..., 1\right)$$

e quello dei prezzi lettera,

$$p^l = \left(p_1^l, p_2^l, ..., 1\right),$$

con $p_i^d < p_i^l$ per ogni $i = 1, 2, ..., n - 1$. Il cliente sceglie il vettore dei suoi acquisti, $c \in \Re^n$ e quello delle sue vendite $v \in \Re^n$ in cui c e v sono maggiori o uguali a zero in tutte le loro componenti diverse dall'ultima. L'operazione può realizzarsi se vale

$$cp^l - vp^d = 0.$$

Di norma nemmeno questa condizione è sufficiente per poter realizzare l'operazione, infatti lo specialista il più delle volte stabilisce delle quantità massime che a quei prezzi egli è disposto a comprare e/o a vendere. Quindi l'operazione diventa realizzabile solo se anche questo vincolo è verificato.

L'effetto complessivo sui beni in possesso del cliente sarà un cambiamento pari a $h = c - v$. Siccome il prezzo lettera è maggiore del prezzo denaro, e si presume che il soggetto preferisca sempre avere più denaro, non conviene insieme comprare e vendere un bene che non sia la moneta, quindi sarà sempre $c_i v_i = 0$ per ogni $i < n$. In quanto alla moneta, comprarla e venderla contemporaneamente, anche se non costa nulla, non ha alcun senso, la quantità comprata o venduta, sarà soltanto a saldo delle altre operazioni affinché valga la condizione di pareggio contabile, o di **vincolo di bilancio**, $cp^l - vp^d = 0$.

Se infine arriviamo ai mercati elettronici (telematici) vediamo che in questi sono inserite delle proposte di affari, del genere "sono compratore di mille azioni Generali al prezzo di 29,75 euro" e chi fosse d'accordo risponde vendendo a quel prezzo magari soltanto 500 azioni. La proposta viene allora aggiornata in "sono compratore di 500 azioni Generali al prezzo di 29,75 euro". In questo genere di mercato è difficile parlare di prezzo delle Generali, il prezzo è soltanto una specificazione della proposta di affare. Immaginiamo che le proposte in essere attualmente siano due, "sono compratore di mille azioni Generali al prezzo di 29,75 euro" e "sono compratore di 2500 azioni Generali al prezzo di 29,5 euro". Chi volesse vendere 2500 Generali accetterebbe interamente la prima proposta, quella per lui più conveniente, e la seconda per 1500 azioni, il prezzo medio realizzato sarà quindi $\frac{29{,}5 \times 1500 + 29{,}75 \times 1000}{2500}$, quello marginale, al quale avrebbe potuto accrescere o ridurre la sua offerta per piccole quantità, è di $29,5$.

Sarebbe poco realistico pensare a dei prezzi, unici per ogni bene, ai quali il soggetto decide quanto vuole vendere o comprare. In alcuni casi posso solo, ai prezzi dati, essere compratore, ad esempio quando sono cliente del supermercato; in altri ho prezzi diversi se voglio vendere o comprare; in altri ancora ho semplicemente delle proposte, in cui il prezzo è un particolare importante della proposta, a cui posso o meno aderire o che posso essere io stesso a fare.

9.2 prezzi impliciti e prezzi correnti

Un modo di concepire e di utilizzare la nozione di prezzi è quello in cui essi non rappresentano delle condizioni a cui possono essere realizzati dei contratti, ma sono un modo per sintetizzare le preferenze di un soggetto.

Definizione (prezzi impliciti) *$p \in \Re^n$ è un sistema di prezzi impliciti (ombra) in $x \in X$, X sottoinsieme di $\Re^n$, secondo la relazione di preferenza P se*

$$y \in P(x) \Longrightarrow (y - x)p > 0.$$

Tali prezzi ci dicono semplicemente che se i beni che ora possediamo sono indicati dal vettore (riga) $x \in X \subset \Re^n$ tutti i vettori di beni preferiti ad x, gli $y \in P(x)$, sono più costosi di x, $(y - x)p > 0$ o $yp > xp$. Quindi se potessi cambiare di $h \in \Re^n$ i beni in mio possesso alla sola condizione che $hp = 0$, nessun cambiamento potrebbe portarmi da x in una alternativa che considero migliore.

Nel caso particolarmente semplice in cui avessi solo due beni, di cui il secondo è la moneta, ed ipotizzando, realisticamente, che avere più moneta sia sempre vantaggioso, il vettore $p = (p_1, p_2)$ per essere un sistema di prezzi impliciti, deve avere $p_2 > 0$, in caso contrario il cambiamento $h = (h_1, h_2)$ con $h_1 = 0$ e $h_2 = 1$, quindi $h = (0, 1)$, che porta nei migliori, avrebbe $ph = p_2 \leq 0$, non sarebbe costoso. Perché $p = (p_1, p_2)$ sia un sistema di prezzi impliciti, p_1 deve essere tale che non convenga né comprare né vendere il bene 1 se potessi farlo ai prezzi (p_1, p_2). Un cambiamento per essere al masssimo conveniente deve massimizzare la moneta che resta dopo il cambiamento, si esclude quindi che $hp < 0$, per essere possibile richiede che anche la eventuale controparte, che vede un cambiamento pari a $-h$, non abbia una quantità di moneta massima, escludendo che $-hp < 0$. Deve allora essere $hp = 0$. Quindi h deve essere un vettore del tipo $\mu(p_2, -p_1)$ dove μ è un numero reale. Per $\mu > 0$ la quantità comprata del bene 1 è μp_2 per il cui pagamento si spende μp_1 di moneta. Per $\mu < 0$ la quantità venduta del bene 1 è $-\mu p_2$ per il cui pagamento si ottiene μp_1 di moneta. Perchè (p_1, p_2) sia un sistema di prezzi impliciti bisogna che tutti i cambiamenti $h = \mu(p_2, -p_1)$ non portino nei preferiti rispetto allo stato iniziale. Ponendo pari ad 1 il prezzo del bene moneta $h = \mu(p_2, -p_1)$ diventa $h = \mu(1, -p_1)$ e μ è la quantità comprata, se $\mu > 0$, del bene 1 o venduta, se $\mu < 0$, contro una quantità ceduta (ottenuta) di moneta pari a $\mu p_1 > 0$. p_1 deve essere tale che non convenga né comprare né vendere qualsiasi quantità del bene 1. Diremo che p_1 è il prezzo implicito del bene 1. Se p_1 fosse troppo grande converrebbe vendere il bene 1, al contrario se fosse troppo piccolo converrebbe comprarlo.

I prezzi impliciti, non rappresentando delle condizioni a cui posso realizzare un contratto, non fanno nascere le complicazioni che si sono viste nella sezione precedente.

Potremmo indicare con $\phi(x, P)$ l'insieme dei prezzi impliciti in x secondo la relazione di preferenza individualistica P. E' facile controllare che se $p \in \phi(x, P)$ e $\lambda > 0$ anche $\lambda p \in \phi(x, P)$. Infatti non cambia l'insieme dei vettori il cui valore è 0.

$P(x) - x$ può essere interpretato come l'insieme degli arricchimenti del soggetto portatore delle preferenze P, che si trovi ad avere una dotazione personale iniziale pari a x.

Se vale l'ipotesi di apertura delle preferenze non solo $P(x)$ ma anche $P(x) - x$ sono sottoinsiemi aperti di $\Re^n$.

Facendo l'ipotesi di convessità delle preferenze, sia $P(x)$ che $P(x) - x$ sono sottoinsiemi convessi di $\Re^n$.

Vale il seguente teorema, di cui per altro non diamo la dimostrazione,

Teorema (dei prezzi impliciti) *Nelle condizioni di cui sopra e con preferenze aperte e convesse* $\phi(x, P) \neq \emptyset$.

Supponiamo che esista un vettore di prezzi, $p \in \Re^n$, al quale, ipotesi che abbiamo visto non essere realistica, il soggetto possa sempre cambiare i suoi possessi di un vettore $h \in \Re^n$ purché sia verificata la condizione $hp = 0$.

Chiamiamo questi prezzi, **prezzi di mercato concorrenziale** (pmc), o anche, semplificando, **prezzi correnti**.

Vale il seguente importante risultato

Teorema (dei prezzi correnti) *Condizione necessaria e sufficiente perché vi sia un cambiamento vantaggioso e realizzabile ai prezzi correnti p, è che i prezzi correnti non siano anche prezzi impliciti, $p \notin \phi(x, P)$.*

Proof. Per la necessità si osservi che se $p \in \phi(x, P)$ deve essere, per ogni h tale che $x+h \in P(x)$, $hp > 0$, escludendo la realizzabilità di h ai prezzi correnti p.

Per la sufficienza si osservi che se $p \notin \phi(x, P)$ deve esistere un $h \in P(x) - x$ tale che $hp \leq 0$. Se $hp = 0$ la sufficienza è dimostrata. Se $hp < 0$ è sempre possibile in h aumentare la moneta, fermo il resto, salendo quindi nelle preferenze, fino ad avere un h' ancora in $P(x) - x$ con $h'p = 0$. ■

10 Massimizzazione vincolata

Molti problemi classici dell'economia politica vengono messi nella forma di ricerca di un massimo per una **funzione obiettivo** a valori reali, all'interno di un insieme delimitato dal verificare una o più condizioni specificate nella forma di disequazioni, **vincoli**.

Sia data la funzione f, definita in $\Re^n$ e con valori in $\Re$, che rappresenta la funzione obiettivo

$$f : \Re^n \to \Re.$$

Consideriamo ora la funzione g che rappresenta il vincolo, definita in $\Re^n$ e con valori in $\Re$,

$$g : \Re^n \to \Re.$$

Il vincolo può prendere la forma

$$g(x) \geq c,$$

dove $c \in \Re$.

I vincoli possono essere più di 1. In questo caso la g diventa $(g^1, g^2, .., g^m)$, un vettore in $\Re^m$, e tale diventa anche la c.

Il vincolo può essere scritto nella forma $g(x) - c \geq 0$, basta trasformare la g originaria in $g - c$. Rappresentando ciò in forma più analitica abbiamo

$$\begin{aligned} g^1(x) - c_1 &\geq 0, \\ g^2(x) - c_2 &\geq 0, \\ &\vdots \\ g^m(x) - c_m &\geq 0. \end{aligned}$$

Il problema diventa facilmente trattabile qualora le nostre funzioni siano differenziabili.

10.1 breve inciso matematico

10.1.1 il differenziale

Se $f : \Re^n \to \Re$ possiamo scrivere

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + |h|\,\varphi(x+h,l),$$

dove l è una funzione lineare (tale che $l(h+k) = l(h) + l(k)$ e, con $\mu \in \Re$, $l(\mu h) = \mu l(h)$) e per $h \neq 0$ la

$$\varphi(x+h,l) =: [f(x+h) - f(x) - l(h)] \,/\, |h|$$

è funzione non solo di x ed h e della f ma anche della funzione lineare l che è stata utilizzata.

Si dice che la f è differenziabile in $x \in \Re^n$ se esiste una l lineare tale che la $\varphi(x+h,l)$, come funzione di h, sia infinitesima in $x \in \Re^n$:

$$\lim_{h\neq 0, h\to 0} \varphi(x+h,l) = 0.$$

Quando questo è il caso la $l(h) = l(h,x)$ è il **differenziale** della f in x. Si dimostra che il differenziale, quando esiste, prende la forma

$$l(h,x) = Df(x)h$$

dove $Df(x)$, il **gradiente** di f in x, è il vettore riga le cui componenti sono le derivate parziali della f.

$$Df(x) = (Df_1(x), Df_2(x), ..., Df_n(x))$$

e

$$Df_i(x) = \lim_{h_i\neq 0, h_i\to 0} [f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x)] \,/ h_i.$$

h è un vettore colonna.

Si dice che la f è differenziabile in $\Re^n$ se lo è in ogni $x \in \Re^n$.

Esempio. La f sia definita in $\Re^3$, quindi $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$, e sia $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$. Abbiamo allora $Df_1(x) = x_2 - x_3$, $Df_2(x) = x_1$, $Df_3(x) = -x_1$. Quindi, in particolare, per $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$ abbiamo $Df_1(2, -1, 0) = -1$, $Df_2(2, -1, 0) = 2$, $Df_3(2, -1, 0) = -2$.

$$Df(2, -1, 0) = (-1, 2, -2).\#$$

Se $Df(x)h \neq 0$, la funzione, in $\mu \in \Re$, $f(x+\mu h) - f(x)$ per μ sufficientemente prossimo a 0, assume il segno di $\mu Df(x)h$. f cresce per $Df(x)h > 0$, scende nel caso opposto. $Df(x)h$ ci dice quindi in che modo varia la f quando da x ci si muove nella direzione h restando sufficientemente vicini a x. Infatti

$$f(x+\mu h)-f(x)=\mu l(h)+\mu|h|\varphi(x+\mu h,l),$$

quindi

$$\frac{f(x+\mu h)-f(x)}{\mu}=Df(x)h+|h|\varphi(x+\mu h,l).$$

Per μ che tende a 0, $\mu\neq 0$, $|h|\varphi(x+\mu h,l)$ tende a 0 mentre $\frac{\mu}{|\mu|}Df(x)h$ diventa, per $\mu>0$, pari a $Df(x)h$, per $\mu<0$, pari a $-Df(x)h$. Siccome $\frac{f(x+\mu h)-f(x)}{|\mu|}$ tende a $\frac{\mu}{|\mu|}Df(x)h$ abbiamo che il segno di $f(x+\mu h)-f(x)$ diventa quello di $\frac{\mu}{|\mu|}Df(x)h$.

Nel caso in cui $Df(x)h=0$ non abbiamo alcuna indicazione circa il segno di $f(x+\mu h)-f(x)$.

10.1.2 prodotto tra vettori e angolo

In generale il prodotto di due vettori a e b, $ab=\sum_i a_ib_i$, può scriversi nella forma

$$ab=|a||b|\cos\beta$$

dove β è l'angolo tra i due vettori, quello non maggiore di π. $|a|$ è la norma del vettore $a\in\Re^n$ ed è

$$|a|=:\sqrt{\sum_i a_i^2}.$$

Due vettori sono ortogonali quando $ab=0$. Hanno prodotto positivo se $\beta\in[0,\frac{\pi}{2})$, negativo se $\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi]$, nullo se $\beta=\frac{\pi}{2}$. A parità di norma, $|a|$ e $|b|$ dati e positivi, ab è massimo se $\beta=0$.

Fermi $|a|$ e $|b|$ abbiamo che ab è una funzione decrescente di β. Essa è massima, e pari a $|a||b|$ per $\beta=0$ ed è minima, e pari a $-|a||b|$, per $\beta=\pi$.

10.1.3 funzione convessa

La funzione ψ, $\psi:\Re^n\to\Re$, ha la concavità rivolta verso il basso, è **convessa**, quando verifica, per ogni $x,h\in\Re^n$, la diseguaglianza

$$\psi(x+h)\leq\psi(x)+D\psi(x)h,$$

il valore assunto in $x+h$ non supera la somma del valore assunto in x e del differenziale della funzione in x calcolato nella direzione h.

Esempio. Sia $\psi(y)=-yy=-|y|^2$, sarà allora $D\psi(x)=-2x$ e quindi $D\psi(x)h=-2xh$. Ma sarà anche

$$\psi(x+h)-\psi(x)=-\left[(x+h)^2-x^2\right]=-2xh-h^2,$$

quindi avremo

$$\psi(x+h) - \psi(x) = -2xh - h^2 < D\psi(x)h = -2xh,$$

la ψ è convessa.

10.2 direzione ottimale e condizione necessaria per avere un massimo libero

Quando parliamo di direzione ci riferiremo di solito a vettori di norma 1. Se $a \in \Re^n$ con $a \neq 0$, $\left|\frac{a}{|a|}\right| = 1$.

Se inizialmente mi trovo in $x^\circ \in \Re^n$ e sono alla ricerca di una **sede di massimo** per la f, se $Df(x^\circ) \neq 0$, la **direzione ottimale**, quella nella quale la f sale più rapidamente, è quella $h \in \Re^n$ per cui, con $|h| = 1$, $Df(x^\circ)h$ è massima. Quindi quella per cui h e $Df(x^\circ)$ sono **allineati**, fanno un angolo $\beta = 0$. Ma allora, se $Df(x^\circ) \neq 0$, la direzione ottimale sarà quella di

$$\frac{Df(x^\circ)}{|Df(x^\circ)|}.$$

Il differenzia della f in questa direzione sarà

$$Df(x^\circ)\frac{Df(x^\circ)}{|Df(x^\circ)|} = |Df(x^\circ)|.$$

Nella ricerca di una sede di massimo per la f, ci muoviamo nella direzione ottimale, cambiandola ogni volta che cambiando la x anche la $\frac{Df(x)}{|Df(x)|}$ cambia. Perdiamo questa guida solo quando diventa $Df(x) = 0$. Qui non sappiamo se abbiamo davvero raggiunto una sede di massimo o se ancora c'è una direzione muovendosi nella quale la f può salire ulteriormente.

Quindi condizione necessaria, ma non sufficiente, per essere in una sede di massimo è che

$$Df(x) = 0.$$

Se esiste un vincolo che deve essere verificato nella forma

$$g(x) \geq 0,$$

finché continua ad essere $g(x) > 0$, è come se il vincolo non ci fosse e la direzione ottimale continua ad essere la $\frac{Df(x)}{|Df(x)|}$.

Per sapere come sta variando il vincolo quando ci muoviamo nella direzione ottimale dobbiamo osservare il differenziale della g quando ci muoviamo nella direzione ottimale secondo la f,

$$Dg(x)\frac{Df(x)}{|Df(x)|}.$$

Se $Dg\,(x)\,\frac{Df(x)}{|Df(x)|} \geq 0$, avendo $g\,(x) \geq 0$, siamo certi che muovendo nella direzione ottimale non rischiamo di uscire da dove il vincolo è pienamente rispettato, g non scende. Se invece $Dg\,(x)\,\frac{Df(x)}{|Df(x)|} < 0$, muovendo nella direzione ottimale il valore del vincolo scende, può quindi finire col cessare di essere positivo e diventare $g\,(x) = 0$ mentre continua ad essere $Dg\,(x)\,\frac{Df(x)}{|Df(x)|} < 0$. Non è più possibile allora, quando diventa $g\,(x) = 0$, continuare a muoversi nella direzione $\frac{Df(x)}{|Df(x)|}$, ottimale secondo la f, perchè diventerebbe $g < 0$, usciremmo dall'insieme in cui il vincolo è verificato. Ora,

$$g\,(x) = 0 \quad e \quad Dg\,(x)\,\frac{Df(x)}{|Df(x)|} < 0,$$

il vincolo è diventato **effettivo**.

10.3 direzione ottimale quando il vincolo è effettivo

Indichiamo con

$$a = \frac{Df(x)}{|Df(x)|}$$

la direzione ottimale della funzione obiettivo.

La direzione ottimale dal punto di vista della funzione vincolo, la direzione nella quale la g salirebbe più rapidamente, è la

$$b = \frac{Dg(x)}{|Dg(x)|}.$$

Quando il vincolo è effettivo abbiamo

$$g\,(x) = 0 \quad e \quad Dg\,(x)\,\frac{Df(x)}{|Df(x)|} = Dg\,(x)\,a < 0.$$

Posso sempre scrivere, per $Dg\,(x) \neq 0$,

$$Dg\,(x) = |Dg(x)|\,b$$

e quindi

$$Dg\,(x)\,\frac{Df(x)}{|Df(x)|} = |Dg(x)|\,ba < 0.$$

Siccome $|a| = |b| = 1$ abbiamo

$$ba = \cos\beta_{f,g},$$

$\beta_{f,g}$ è l'angolo tra a e b. Col vincolo effettivo abbiamo $ba = \cos\beta_{f,g} < 0$, quindi

$$\frac{\pi}{2} < \beta_{f,g} \leq \pi.$$

Indichiamo con h la direzione da seguire. In essa la f deve salire e quindi deve essere $ah > 0$, h deve quindi essere costituita da una quantità positiva di a. Tanto vale mettere in h una quantità 1 di a, quindi

$$h = a + c.$$

Per $c = 0$ abbiamo $bh = ba < 0$. Quindi, siccome deve diventare $bh \geq 0$, bisogna aumentare il valore di bh, la direzione nella quale bh sale più rapidamente è la direzione b, il gradiente di bh è infatti uguale a b. Deve quindi essere

$$h = a + \eta b + c'$$

con $\eta > 0$ e c' che non deve contenere né a né b, quindi sarà

$$ac' = bc' = 0.$$

Ma allora tanto vale stabilire che c', non incidendo né sull'obiettivo né sul vincolo, sia 0. Abbiamo quindi

$$h = a + \eta b,$$

una funzione di η, ah diventa allora

$$ah = 1 + \eta \cos \beta_{f,g},$$

e bh diventa

$$bh = \cos \beta_{f,g} + \eta.$$

Siccome $\cos \beta_{f,g} < 0$, al salire di η abbiamo che ah scende mentre bh sale. Quindi se si fa salire η è perché abbiamo ancora $bh = \cos \beta_{f,g} + \eta < 0$, smettiamo quindi appena diventa $bh = \cos \beta_{f,g} + \eta = 0$. Quindi per

$$\eta^\circ = -\cos \beta_{f,g} \quad e \quad h^\circ = a - b \cos \beta_{f,g}.$$

A questo punto abbiamo $bh^\circ = 0$ e ah° uguale a

$$ah^\circ = a \left(a - b \cos \beta_{f,g} \right) = 1 - \cos^2 \beta_{f,g} = \sin^2 \beta_{f,g},$$

mentre sarà

$$|h^\circ| = \sqrt{h^\circ h^\circ} = \sqrt{aa - 2ab \cos \beta_{f,g} + bb \cos^2 \beta_{f,g}} = \sqrt{1 - \cos^2 \beta_{f,g}} = \sqrt{\sin^2 \beta_{f,g}} = \left| \sin \beta_{f,g} \right|,$$

e quindi diventa

$$a \frac{h^\circ}{|h^\circ|} = \frac{\sin^2 \beta_{f,g}}{\left| \sin \beta_{f,g} \right|} = \left| \sin \beta_{f,g} \right|.$$

La direzione ottimale (di norma 1) sarà quindi, finché $\beta_{f,g} < \pi$,

$$o(x) = \frac{h^\circ}{|h^\circ|} = \frac{a - b\cos\beta_{f,g}}{\left|\sin\beta_{f,g}\right|}.$$

Già sappiamo che $bo(x) = 0$, la direzione ottimale fa con b un angolo di 90 gradi. Di conseguenza l'angolo tra a e $o(x)$ deve essere $\beta_{f,g} - \frac{\pi}{2}$.

Nella direzione ottimale vincolata il differenziale della funzione obiettivo,

$$Df(x)o(x) = |Df(x)|\, ao(x) = |Df(x)| \left|\sin\beta_{f,g}\right|,$$

è tanto più grande quanto più lo è $|Df(x)|$, più lungo è il gradiente di f, e quanto più $\beta_{f,g} > \frac{\pi}{2}$ si avvicina a $\frac{\pi}{2}$.

Per $\beta_{f,g} = \pi$ abbiamo $\cos\beta_{f,g} = -1$, $b = -a$, $h = a + \eta(-a) = (1-\eta)\,a$ e diventa

$$ah = 1 - \eta,$$

bh diventa

$$bh = -1 + \eta.$$

Finché $ah > 0$ abbiamo $bh < 0$, non è possibile aumentare la funzione obiettivo rispettando il vincolo. Non esiste una direzione che sia utile e compatibile col vincolo. Quando ciò accade è verificata la condizione necessaria per essere in un massimo vincolato, da $g \geq 0$, della f,

$$g = 0 \wedge \beta_{f,g} = \pi.$$

Esempio. La $f(x_1, x_2)$ abbia

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

e la $g(x_1, x_2)$ abbia

$$g(x_1, x_2) = c - x_1 - x_2.$$

In questo caso

$$Df(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

e

$$Dg(x_1, x_2) = (-1, -1).$$

La direzione ottimale, finché $g(x_1, x_2) = c - x_1 - x_2 > 0$, sarà $Df(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Quando invece $g(x_1, x_2) = 0$ essa diventa

$$Df(x_1, x_2) + \eta Dg(x_1, x_2) = (x_2, x_1) + \eta(-1, -1),$$

con η tale che

$$(-1,-1)\left[(x_2,x_1)+\eta(-1,-1)\right]=-(x_2+x_1)+\eta 2=0,$$

quindi $\eta=\frac{x_2+x_1}{2}$, quindi la direzione ottimale sarà

$$Df(x_1,x_2)+\eta Dg(x_1,x_2)=(x_2,x_1)+\frac{x_2+x_1}{2}(-1,-1)=\left(\frac{x_2-x_1}{2},-\frac{x_2-x_1}{2}\right).$$

Condizione necessaria per un massimo condizionato, con $g(x_1,x_2)=c-x_1-x_2=0$, è quindi che

$$\left(\frac{x_2-x_1}{2},-\frac{x_2-x_1}{2}\right)=(0,0).$$

Ma allora deve essere

$$c-x_1-x_2=0 \quad e \quad x_1=x_2,$$

da cui

$$x_1=x_2=\frac{c}{2}.$$

10.4 un secondo vincolo *

Immaginiamo ora di essere in una sede di massimo per un vincolo, quando il vincolo è effettivo, abbiamo quindi

$$g(x^\circ)=0 \quad e \quad \beta_{f,g}=\pi,$$

ed introduciamo una seconda funzione di vincolo, la g_2. Se $g_2(x^\circ)\geq 0$ questo secondo vincolo in x° non incide, si può fare come se non fosse nemmeno esistente.

Sia allora $g_2(x^\circ)<0$, in questo caso non si può restare in x° ma dobbiamo muoverci nella direzione nella quale $g_2(x^\circ)$ sale più rapidamente, la

$$b_2=\frac{Dg_2(x^\circ)}{|Dg_2(x^\circ)|},$$

avendo tuttavia cura di non uscire dal primo vincolo. Questo rischio non c'è se abbiamo

$$bb_2\geq 0,$$

andando nella direzione ottimale per il secondo vincolo, attualmente insoddisfatto, il primo vincolo non scende.

Qualora invece sia

$$bb_2<0,$$

nel tentativo di muoversi, al fine di soddisfare il secondo vincolo, usciremmo anche dal primo vincolo. Si tratta quindi di correggere la direzione ottimale, ai fini del secondo vincolo, in modo da non uscire dal primo vincolo.

Conviene scrivere il primo vincolo come $g_1(x)$.

Il problema può essere così concepito: finchè

$$g_2(x) < 0 \quad e \quad g_1(x) \geq 0$$

consideriamo $g_2(x)$ come la funzione obiettivo e la $g_1(x)$ come il vincolo, si sale quindi in $g_2(x)$ finché non diventa $g_2(x) = 0$ sempre con $g_1(x) \geq 0$ oppure si arriva in un punto nel quale non è più possibile salire con $g_2(x) < 0$ mantenendo $g_1(x) \geq 0$. Nel primo caso entrambi i vincoli sono verificati. Nel secondo la $g_2(x)$ è diventata massima compatibilmente col primo vincolo ma senza riuscire a smettere di essere negativa; non si riesce a verificare entrambi i vincoli.

In questo secondo caso g_2 è massimo subordinatamente a $g_1(x) \geq 0$, quindi $Dg_1(x)$ e $Dg_2(x)$ sono allineati in direzione opposta,

$$Dg_1(x)^t Dg_2(x) = -|Dg_1(x)|\,|Dg_2(x)|,$$

ma $g_2(x) < 0$.

Se siamo arrivati ad avere

$$g_2(x) = 0 \quad e \quad g_1(x) > 0$$

entrambi i vincoli sono soddisfatti ma solo il secondo lo è esattamente.

Resta il caso in cui entrambi i vincoli sono esattamente soddisfatti e sono entrambi effettivi:

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0 \quad e \quad Dg_1(x)^t Df(x) < 0, \quad Dg_2(x)^t Df(x) < 0.$$

Si tratta allora di vedere se possiamo salire con la funzione obiettivo, la f, continuando a verificare entrambi i vincoli.

10.5 più vincoli *

Nel caso più generale abbiamo m vincoli da soddisfare

$$g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x).$$

$x \in R^n$ è possibile se

$$\forall i \quad g_i(x) \geq 0.$$

Le direzioni compatibili con questi vincoli sono quelle h per cui

$$\forall i \quad g_i(x) = 0 \Longrightarrow Dg_i(x)\,h \geq 0.$$

Se x è possibile la direzione h è ancora possibile se, per i vincoli esattamente soddisfatti, quelli con $g_i(x) = 0$, abbiamo $Dg_i(x)\,h \geq 0$. Dobbiamo trovare la direzione ottimale in questo caso.

Qualora $\forall i \quad g_i(x) = 0 \Longrightarrow Dg_i(x)\, Df(x) \geq 0$ i vincoli non sono effettivi e la direzione ottimale tra quelle possibili è la $Df(x)$, è come se i vincoli non esistessero.

Qualora invece $\exists i \quad g_i(x) = 0$ con $Dg_i(x)\, Df(x) < 0$ il vincolo i-esimo è effettivo. Con β_i indichiamo l'angolo tra i vettori $Df(x)$ e $Dg_i(x)$. Perché il vincolo i-esimo sia effettivo bisogna che

$$g_i(x) = 0 \quad e \quad \beta_i > \frac{1}{2}\pi.$$

Le direzioni possibili sono quelle

$$h \in \Re^n, \quad h \neq 0, \quad \forall g_i(x) = 0 \quad Dg_i(x)\, h \geq 0.$$

Può essere che di direzioni tali non ne esistano, non è possibile allontanarsi da x continuando a rispettare i vincoli. Se invece esse esistono l'insieme delle direzioni possibili sarà un cono in $\Re^n$, C. In C le direzioni utili sono quelle per cui $Df(x)h > 0$. Non è detto che ne esistano. Se vi sono direzioni possibili ed utili quella tra queste ottimale è quella, di norma 1, che ha con $Df(x)$ un angolo minimo.

10.6 condizioni di massimo locale

La condizione necessaria per avere una sede di massimo per la funzione obiettivo, quando esiste un vincolo, diventa dunque,

$$Df(x) = 0 \quad se \quad g(x) \geq 0$$

e, se $Df(x) \neq 0$,

$$\beta_{f,g} = \pi \quad con \quad g(x) = 0.$$

Ricordiamo che $\beta_{f,g}$ è l'angolo tra $Df(x)$ e $Dg(x)$.

Questa è condizione necessaria. Per vedere se, verificandosi essa, non è possibile ancora salire con la f restando nell'intorno del punto in cui siamo arrivati, che indichiamo con x^*, dobbiamo vedere se esiste una curva, $x(t)$ definita per $t \in [0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ e con valori in $\Re^n$, avente $x(0) = x^*$ e tale che su di essa, per $t > 0$, possa essere $f(x(t)) > f(x(0))$ con $g(x(t)) \geq 0$. Se una tale curva non esiste siamo certi che x^* è sede di massimo condizionato. Ciò non significa che non può esistere un'altra sede di massimo in cui la funzione obiettivo raggiunga valori più alti, ma solo che esiste un intorno di x^* in cui questo non può accadere.

Tuttavia qualora le funzioni ψ con cui trattiamo sono **convesse**, verificano la diseguaglianza

$$\psi(x + h) \leq \psi(x) + D\psi(x)h,$$

siamo certi che la condizione necessaria di massimo è anche sufficiente e che non esistono sedi di massimo con valori di f diversi. Abbiamo in x un **massimo globale**.

Teorema del massimo globale. Con f e g convesse, se in x° è verificata la condizione necessaria per un massimo, x° non solo è sede di massimo ma non esiste un altro x con $f(x) > f(x^{\circ})$ e con $g(x) \geq 0$.

Dim. Se $f(x^{\circ}+h) > f(x^{\circ})$, deve, per la convessità della f, essere

$$Df(x^{\circ})h \geq f(x^{\circ}+h) - f(x^{\circ}) > 0.$$

Se in x° sono verificate le condizioni necessarie per un massimo non può, con $Df(x^{\circ})h > 0$, essere $g(x^{\circ}) > 0$. Avremmo quindi $g(x^{\circ}) = 0$ e, per le condizioni necessarie di massimo,deve essere $Dg(x^{\circ})h < 0$. Ma allora, dovendo essere, per la convessità di g,

$$g(x^{\circ}+h) \leq g(x^{\circ}) + Dg(x^{\circ})h < g(x^{\circ}) = 0,$$

deve essere $g(x^{\circ}+h) < 0$.#

Quindi la **sede di massimo locale**, in questo caso, è anche sede di un massimo globale.

Non si può escludere, nemmeno in questo caso, che esistano più sedi di massimo nelle quali tuttavia la funzione obiettivo raggiunge lo stesso valore. In questo caso, si potrebbe dimostrare, le sedi di massimo sono un insieme convesso.

Per essere certi della unicità della sede di massimo dobbiamo rafforzare l'ipotesi di convessità delle nostre funzioni in quella di **convessità stretta**, che vuole

$$per \quad h \neq 0, \quad \psi(x+h) < \psi(x) + D\psi(x)h.$$

In questo caso se $f(x+h) = f(x)$ deve essere $Df(x)h > 0$ e quindi per $\mu > 0$ sufficientemente prossimo a 0 deve essere $f(x+\mu h) > f(x)$. Se $g(x+h) \geq g(x)$ sarà anche $Dg(x)\,h > 0$. Quindi da x si può ancora salire con f nel rispetto del vincolo. Ciò basta ad escludere che possano esserci più sedi di massimo.

10.7 allentamento del vincolo

Supponiamo di essere in una sede di massimo per la f con il vincolo g effettivo.

Abbiamo quindi $g(x) = 0$ con $Df(x)$ e $Dg(x)$ che sono allineati in direzione opposta, esiste cioè un $\lambda > 0$ tale che valga

$$Df(x) = -\lambda Dg(x).$$

In tali circostanze diventa possibile salire ancora con la funzione obiettivo se si verifica un **allentamento del vincolo** che permetta di scendere con la g al di sotto dello 0. Se scriviamo il vincolo come

$$g(x) + c \geq 0,$$

un allentamento del vincolo può essere concepito come un cambiamento in c pari ad $a > 0$. In termini differenziali possiamo dire che diventa possibile un cambiamento di x, h, tale che $Dg(x)h = -a < 0$. Essendo in x effettivo il vincolo, senza questo allentamento i cambiamenti possibili sono solo quelli per cui vale $Dg(x)h \geq 0$ e con essi non si riesce ad avere $Df(x)h > 0$.

Abbiamo al contrario un **restringimento** del vincolo nel caso in cui $a < 0$.

L'effetto sulla funzione obiettivo del cambiamento h, $Df(x)h$, sarà, visto che vale $Df(x) = -\lambda Dg(x)$,

$$Df(x)h = -\lambda Dg(x)h = \lambda a.$$

Siccome $\lambda > 0$, dalla $Df(x) = -\lambda Dg(x)$ otteniamo

$$|Df(x)| = \lambda |Dg(x)|,$$

da cui

$$\lambda = \frac{|Df(x)|}{|Dg(x)|}.$$

L'effetto, sulla funzione obiettivo, del cambiamento della funzione vincolo sarà quindi:

$$\delta f = Df(x)h = \frac{|Df(x)|}{|Dg(x)|}a.$$

δf, per $a > 0$, è positivo e tanto maggiore quanto più rapidamente sale la funzione obiettivo, e tanto minore quanto più rapidamente sale la funzione vincolo. Al contrario δf, per $a < 0$, è negativo e tanto minore quanto più rapidamente sale la funzione obiettivo, e tanto maggiore quanto più rapidamente sale la funzione vincolo.

Se ϕ è una funzione differenziabile avente $D\phi(x) \neq 0$, la direzione in cui essa sale più rapidamente è, già lo sappiamo, $\frac{D\phi(x)}{|D\phi(x)|}$. Il differenziale della ϕ in quella direzione sarà

$$\delta\phi(x) = D\phi(x) \frac{D\phi(x)}{|D\phi(x)|} = |D\phi(x)|.$$

La derivata di f rispetto ad una variazione del vincolo, quando siamo in una sede di massimo con vincolo effettivo, la possiamo indicare con $D_g f(x)$, vale

$$D_g f(x) = \frac{\delta f}{a} = \frac{|Df(x)|}{|Dg(x)|}.$$

$\delta f = \frac{|Df(x)|}{|Dg(x)|}a$ ci dice quanto vale, in termini di funzione obiettivo, un allentamento del vincolo, $a > 0$, o quanto costa un suo restringimento, $a < 0$. Si può allora interpretare $D_g f(x) = \frac{|Df(x)|}{|Dg(x)|}$ come il **prezzo di una variazione del vincolo** in termini di funzione obiettivo.

Nell'analisi precedente risulta soltanto che deve essere $Dg(x)h = -a$, $Dg(x)$ e $Df(x)$ nel caso sono allineati in direzione opposta, e che il differenziale della f è $\frac{|Df(x)|}{|Dg(x)|}a$. Non dice molto sulla h; se h' è ortogonale a $Dg(x)$, $Dg(x)h' = 0$, anche

$Dg(x)\,(h+h') = -a$. Tuttavia, siccome $Df(x)h$ e $Dg(x)h$ sono dei differenziali, la approssimazione della variazione della funzione relativa, è tanto maggiore quanto più h è piccolo, $|h|$ è basso.

Siamo allora interessati a minimizzare $|h|$ con $Df(x)h = \delta$ dato. Siccome in generale $Df(x)h = |Df(x)|\,|h|\cos\beta$, β è l'angolo tra $Df(x)$ e h, volendo minimizzare $|h|$, se $\delta > 0$, si deve massimizzare $\cos\beta$ e quindi avere $\beta = 0$. Al contrario, per $\delta < 0$, si deve minimizzare $\cos\beta$, e quindi avere $\beta = \pi$. h e $Df(x)$ devono essere allineati nella stessa direzione, se $a > 0$, in quella opposta se $a < 0$. Sarà allora

$$h = \rho Df(x)$$

con $\rho a > 0$. Dovendo essere,

$$Df(x)h = \rho\,|Df(x)|^2 = \lambda a$$

abbiamo che,

$$\rho = \frac{\lambda a}{|Df(x)|^2} = a\frac{1}{|Df(x)|\,|Dg(x)|}$$

e quindi

$$h = \frac{a}{|Df(x)|\,|Dg(x)|}Df(x)$$

e

$$|h| = \frac{|a|}{|Dg(x)|}.$$

11 il problema del consumatore

Vediamo il comportamento del consumatore come un caso particolare di massimizzazione condizionata.

Le preferenze del soggetto siano rappresentate da una funzione di utilità u definita sui beni che il soggetto possiede e che sono concepiti come dei vettori in $x \in \Re^n$.

Quindi

$$u : \Re^n \to \Re$$

è la funzione obiettivo.

Immaginiamo che vi sia un vettore di prezzi, $p \in \Re^n$, ai quali può essere comprata o venduta una qualsiasi quantità dei diversi beni. Il valore di x ai prezzi p, considerando x un vettore riga e p un vettore colonna, è dato da xp. Introduciamo la funzione vincolo nella forma

$$g(x) = s - xp,$$

dove s indica quanto il soggetto può al più spendere. $g(x) \geq 0$ significa che il valore di x ai prezzi p non supera s.

Il **problema del consumatore** diventa, massimizzare $u(x)$ sotto il vincolo $g(x) \geq 0$.

In questo caso la $Df(x) = Du(x)$ e la $Dg(x) = -p$. $Du(x)$ è il vettore delle **utilità marginali**, la componente $i - esima$ indica l'utilità marginale del bene $i - esimo$.

La condizione necessaria di massimo diventa allora: se abbiamo $Du(x) = 0$ con $g(x) \geq 0$ non abbiamo convenienza evidente ad aumentare il consumo di nessun bene, il differenziale della funzione di utilità, $Du(x)h$, sarà 0 in ogni direzione. Se la condizione di massimo è verificata con $Du(x) \neq 0$ i vettori $Du(x)$ e $Dg(x) = -p$ devono essere allineati in direzione opposta, quindi $Du(x)$ e p devono essere allineati nella stessa direzione. Deve cioè esistere un numero positivo σ tale che valga

$$\sigma p = Du(x).$$

Scritto in modo più analitico diventa

$$\forall i \in M \quad \sigma p_i = D_i u(x).$$

Se il prezzo di un bene è 0 anche la sua utilità marginale deve essere 0. Se il prezzo del bene è $\neq 0$ il rapporto tra la sua utilità marginale ed il prezzo deve essere pari al numero positivo σ uguale per ogni bene, quindi

$$\frac{D_i u(x)}{p_i} = \sigma.$$

Si può interpretare $\frac{1}{p_i}$ come la quantità del bene i che si può comprare spendendo 1, e quindi considerare $\frac{D_i u(x)}{p_i} = D_i u(x) \frac{1}{p_i}$ come il differenziale della funzione di utilità quando si spenda 1 nel solo bene i. Questo differenziale deve essere uguale per tutti i beni il cui prezzo sia diverso da zero.

Se i e j sono due beni con $D_j u(x) \neq 0$, il loro **rapporto di sostituzione** è dato da

$$\sigma_{i,j} = \frac{D_i u(x)}{D_j u(x)},$$

ed indica con quanto di j bisogna sostituire una riduzione di 1 di i perchè, fermi gli altri beni, il differenziale di u sia 0. $Du(x)h$, in questo caso, diventa $D_i u(x)\,(-1) + D_j u(x) \sigma_{i,j} = 0$. Se la condizione di massimo è verificata sarà vero che

$$\sigma_{i,j} = \frac{D_i u(x)}{D_j u(x)} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Ricordando quanto discusso nella sezione precedente, σ è il valore del vincolo di spesa del consumatore. Esso ci dice il prezzo in utilità che il soggetto sarebbe disposto a pagare per allentare il vincolo o il costo per lui di un restringimento del vincolo.

Se ipotizziamo che la funzione di utilità sia strettamente convessa esiste una sola soluzione al problema del consumatore. La soluzione è funzione del vettore dei prezzi p e del vincolo (di bilancio) che è funzione ancora di p ma anche di s. In questo caso il vettore di beni, che è soluzione del problema del consumatore, è una funzione

$$kd\,(p, s; u)\,,$$

che chiamiamo la **funzione di domanda** del consumatore e che dipende, oltre che da come è la sua funzione di utilità, dai prezzi p e dalla spesa massima che gli è consentita, la s. Quando non è necessario ricordare la funzione di utilità, perché essa viene considerata data, scriviamo semplicemente $d\,(p, s)$. Il massimo di utilità che il soggetto può ottenere dato il vincolo di bilancio è $u\,(d\,(p, s))$, che può scriversi come $u\,(p, s)$. Essa prende il nome di funzione di **utilità indiretta**.

Nella analisi svolta non vi sono altri vincoli oltre a quello di bilancio. Altri vincoli potrebbero riguardare il segno della quantità di un bene, questo potrebbe dover essere necessariamente non negativo o all'opposto non positivo. Qui non stiamo a studiare il caso in cui intervenga più di un vincolo e quindi trascuriamo queste ulteriori complicazioni.

Ci soffermiamo invece a studiare brevemente la funzione di domanda. Se cambia il vettore dei prezzi cambia anche quello di domanda, lo stesso accade se cambia la spesa massima.

Si distingue allora un **effetto prezzi sulla domanda**,

$$d\,(p', s) - d\,(p, s)\,,$$

quando i prezzi cambiano da p a p', ed un **effetto spesa (o reddito)**,

$$d\,(p, s') - d\,(p, s)\,,$$

quando, fermi i prezzi, cambia la spesa massima da s a s'.

Possiamo immaginare di **compensare** l'effetto della variazione dei prezzi mediante una variazione della spesa in modo che diventi $u\,(p', s'') = u\,(p, s)$. Quindi senza che cambi l'utilità massima che si può ottenere. Diciamo che $s'' - s$ è la variazione, nella spesa massima, compensatoria della variazione dei prezzi da p a p'.

$d\,(p', s'') - d\,(p, s)$ indica come cambia la domanda dei diversi beni quando il cambiamento dei prezzi è compensato. Esso viene chiamato **effetto di sostituzione**.

La differenza $d\,(p', s) - d\,(p', s'')$ indica la differenza, ai nuovi prezzi, tra la domanda non compensata, quella effettiva, e quella compensata. Essa viene chiamata **effetto reddito**. Nel cambiamento dei prezzi è implicito un cambiamento di spesa che modifica l'utilità finale da $u\,(p, s) = u\,(p', s'')$ iniziale a $u\,(p', s)$ finale.

Sommando l'effetto sostituzione all'effetto reddito otteniamo

$$[d(p', s'') - d(p, s)] + [d(p', s) - d(p', s'')] = d(p', s) - d(p, s),$$

il cambiamento di domanda dovuto al cambiamento dei prezzi, ferma la spesa massima.

Sull'effetto sostituzione possiamo dare un ulteriore risultato. Deve valere

$$[d(p', s'') - d(p, s)]\, p > 0,$$

infatti se così non fosse avremmo $0 \leq s - d(p, s)\, p \leq s - d(p', s'')\, p$, quindi $d(p', s'')$ verificherebbe il vincolo $g(x) = s - xp \geq 0$. Ma $u(p', s'') = u(p, s)$ per cui avremmo più soluzioni al problema del consumatore, con convessità stretta ciò non è possibile. Quindi $[d(p', s'') - d(p, s)]\, p > 0$. Con lo stesso ragionamento vediamo che deve essere

$$[d(p, s) - d(p', s'')]\, p' > 0.$$

Ma allora vale anche

$$[d(p', s'') - d(p, s)]\,(p' - p) < 0.$$

La differenza tra la domanda compensata e quella iniziale moltiplicata per la differenza nei prezzi, deve essere negativa.

Nel caso particolare in cui a cambiare sia solo il prezzo del bene i, quindi $p' - p$ ha componenti tutte 0 tranne quella $i{-}esima$, la $[d(p', s'') - d(p, s)]\,(p' - p) < 0$ diventa

$$[d_i(p', s'') - d_i(p, s)]\,(p'_i - p_i) < 0,$$

che ci dice che la domanda compensata del bene i deve scendere se il prezzo del bene i è l'unico a cambiare ed esso sale.

11.1 il costo di garantire un livello minimo di utilità

In questo caso il problema consiste nel minimizzare la spesa $s = xp$ sottoposti al vincolo che con quella spesa il consumatore possa assicurarsi un certo livello minimo di utilità, u°, quindi che il vincolo sia

$$g = u(x) - u^\circ \geq 0.$$

La funzione obiettivo da massimizzare sarà

$$f(x) = -xp.$$

La soluzione di questo problema ci dice a questi prezzi p quale spesa (reddito) s° minima consente al consumatore di raggiungere una utilità u°. Tale soluzione sarebbe la radice della equazione

$$u^\circ - u(d(p, s)) = 0$$

rispetto alla incognita s.

12 il problema dell'impresa

L'impresa ha come obiettivo quello di massimizzare il profitto facendo un processo di produzione che sia tecnicamente possibile.

Possiamo indicare con $y \in \Re^n$ il processo di produzione. In esso vi saranno delle componenti positive, i beni prodotti, e delle componenti negative, i fattori di produzione. Se $p \in \Re^n$ è il vettore dei prezzi, il valore del processo di produzione sarà yp. E' un caso molto particolare quello in cui i prezzi per l'impresa sono un dato, normalmente essi dipendono da quello che fa la nostra impresa, da cosa fanno le altre imprese e da come si comportano i consumatori. Considerando come un dato il comportamento degli altri, i prezzi diventano una funzione di y, $p(y)$, ed il valore di y, profitto, sarà

$$f(y) = yp(y).$$

Quello che una impresa può fare, y, dipende dalla tecnologia ma anche da come l'impresa è attrezzata in quanto a stabilimenti, macchine produttive, disponibilità di tecnici competenti che con essa collaborano. Possiamo precisare questo **vincolo tecnologico** mediante una funzione $\phi(y, k)$, in cui k sta ad indicare le attrezzature dell'impresa. Il vincolo prende allora la forma

$$\phi(y, k) \geq 0.$$

Il processo di produzione, y, deve farsi carico di mantenere costante la capacità produttiva dell'impresa, mediante la manutenzione, la sostituzione delle macchine necessaria a mantenere costante la k, la retribuzione e la necessaria cura dei tecnici dell'impresa. La decisione eventuale di modificare k è un problema diverso da quello di massimizzare il profitto dato il vincolo tecnologico.

Quando $\phi(y, k) > 0$ diciamo che la capacità produttiva non è completamente utilizzata, per $\phi(y, k) = 0$ il processo di produzione y è tecnicamente efficiente, per $\phi(y, k) < 0$ il processo non è possibile con quella attrezzatura, k.

$$Df(y) = p(y) + yDp(y),$$

possiamo interpretare le componenti di $Df(y)$ come il profitto marginale relativo alla variazione di ciascun bene, $D_i f(y)$ sarebbe quindi l'indicatore di come varierebbe il profitto se variasse il solo bene i.

Il differenziale della funzione profitto, sarà

$$Df(y)h = p(y)h + yDp(y)h,$$

dove $p(y)h$ sarebbe il differenziale del profitto se i prezzi non variassero al variare di y, mentre $Dp(y)h$ ci dice come variano i prezzi al variare di h dell'azione dell'impresa. $yDp(y)h$ ci dice come questa variazione nei prezzi, $Dp(y)h$, inciderebbe sul valore di y se y potesse restare costante. $Df(y)h$ è la somma di questi due effetti, $p(y)h + yDp(y)h$.

Esempio. Sia $p(y) = (p_1(y), p_2(y), p_3(y))$, l'impresa è coinvolta con 3 beni. Sia

$$p_1(y) = \frac{5}{9 + y_1 + \frac{1}{11}y_2}$$

$$p_2(y) = \frac{2}{19 + \frac{3}{20}y_1 + \frac{1}{11}y_2}$$

mentre il prezzo del bene 3 sia costante, $p_3(y) = 1$. La funzione profitto sarà allora

$$f(y) = \frac{5y_1}{9 + y_1 + \frac{1}{11}y_2} + \frac{2y_2}{19 + \frac{3}{20}y_1 + \frac{1}{11}y_2} + y_3$$

ed il suo differenziale sarà

$$Df(y)h = \frac{5h_1}{9 + y_1 + \frac{1}{11}y_2} + \frac{2h_2}{19 + \frac{3}{20}y_1 + \frac{1}{11}y_2} + h_3 + yDp(y)h.$$

$yDp(y)h$ è pari a

$$y_1 Dp_1(y)h + y_2 Dp_2(y)h$$

visto che il prezzo del bene 3 è costante. Abbiamo

$$Dp_1(y)h =$$

La direzione in cui il profitto aumenta più rapidamente, se $Df(y) \neq 0$, è la $\frac{Df(y)}{|Df(y)|}$. Quindi se in y vi è della capacità produttiva inutilizzata, $\phi(y,k) > 0$, la direzione possibile in cui il profitto sale più rapidamente è la $\frac{Df(y)}{|Df(y)|}$.

Possiamo avere un massimo profitto con capacità produttiva in eccesso solo se $Df(y) = 0$: non vi è evidente convenienza ad aumentare o ridurre la produzione o l'impiego di nessun bene.

Il processo produttivo esaurisce la capacità produttiva quando $\phi(y,k) = 0$ e la direzione ottimale per il profitto, la $\frac{Df(y)}{|Df(y)|}$, non può essere seguita, $D\phi(y,k)\frac{Df(y)}{|Df(y)|} < 0$. $D\phi(y,k)$ è calcolato considerando come uniche variabili quelle in y. Quando

$$D\phi(y,k)\frac{Df(y)}{|Df(y)|} < 0 \quad e \quad \phi(y,k) = 0$$

il vincolo tecnologico diventa effettivo.

Per $\phi(y,k) = 0$ le direzioni compatibili col vincolo sono quelle che vedono $D\phi(y,k)h \geq 0$, tra queste quelle efficienti sono quelle ortogonali a $D\phi(y,k)$, quelle con $D\phi(y,k)h = 0$.

$D_i\phi(y,k)$ indica come si muove la $\phi(y,k)$ al variare del bene i. Se i è un prodotto in y, $y_i > 0$, è normale che $D_i\phi(y,k) < 0$, non è possibile, con la data capacità produttiva - quindi con $D\phi(y,k)\,h = 0$ -, aumentare la produzione di questo bene senza cambiare qualche altra componente di y. Se i è un fattore in y, $y_i < 0$, è normale che $D_i\phi(y,k) < 0$, non è possibile, con una data capacità produttiva che si vuole mantenere inalterata, con $D\phi(y,k)\,h = 0$, ridurre l'utilizzo di questo bene senza cambiare qualche altra componente di y. Non si possono per altro escludere casi particolari in cui non si possa ridurre un prodotto, un prodotto dannoso che si accompagna alla produzione di altri beni che invece sono utili, o ridurre l'impiego di un fattore la cui rimozione richieda l'impiego di altri fattori o la riduzione di altri prodotti. In questi casi può essere che $D_i\phi(y,k) \geq 0$.

Se $D_i\phi(y,k) < 0$ è sempre possibile compensare una variazione di j, $j \neq i$, con una variazione di i in modo che valga

$$D_j\phi(y,k)\,h_j + D_i\phi(y,k)\,h_i = 0.$$

Per $h_j = 1$ avremo $-h_i = \frac{D_j\phi(y,k)}{D_i\phi(y,k)}$ che possiamo interpretare come il **costo marginale**, in termini del bene i, di un aumento di produzione del prodotto j (o di una riduzione del fattore j) pari ad 1. Facendo

$$\tau_{i,j} = \frac{D_j\phi(y,k)}{D_i\phi(y,k)},$$

chiamiamo $\tau_{i,j}$ **rapporto di trasformazione** tra i e j se questi beni sono entrambi dei prodotti, **rapporto di sostituzione** se sono entrambi fattori.

La condizione per avere un massimo per il profitto con $Df(y) = p(y) + yDp(y) \neq 0$, quindi con $\phi(y,k) = 0$, diventa quella che vuole $Df(y)$ e $D\phi(y,k) \neq 0$ allineati in direzione opposta. Deve quindi esistere un $\sigma > 0$ tale che valga

$$Df(y) + \sigma D\phi(y,k) = 0$$

o, in altra forma,

$$p(y) + yDp(y) + \sigma D\phi(y,k) = 0.$$

Scrivendo in modo analitico abbiamo, per ogni i,

$$p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y) + \sigma D_i\phi(y,k) = 0.$$

$p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y)$ è la derivata del profitto rispetto alla componente $i{-}esima$ di y, $p_i(y)$ indica come sarebbe questa derivata se i prezzi fossero invarianti rispetto ai cambiamenti in y_i, $\sum_j y_j D_i p_j(y)$ indica invece l'effetto sul profitto se, ferme le quantità in y, si avessero tuttavia gli effetti su tutti i prezzi di un cambiamento della componente $i - esima$ di y. Se $D_i\phi(y,k) < 0$ non è tecnicamente possibile aumentare la sola componente $i - esima$ di y. In questo caso deve essere $p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y) > 0$, converrebbe aumentare la componente $i - esima$ di y, ma ciò non è tecnicamente possibile. Se $D_i\phi(y,k) > 0$ è tecnicamente possibile aumentare la sola componente $i - esima$ di y. In questo caso deve essere $p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y) < 0$, converrebbe ridurre la componente $i - esima$ di y ma ciò non è tecnicamente possibile. Se infine $D_i \phi(y,k) = 0$ deve essere anche $p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y) = 0$.

Potremmo interpretare, quando $D_i \phi(y,k) < 0$, $-\sigma D_i \phi(y,k)$ come il costo di aumentare la capacità produttiva per consentire un aumento di y_i. Nel caso in cui $D_i \phi(y,k) > 0$, interpretiamo $-\left[p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y)\right]$ come il costo di aumentare di $\sigma D_i \phi(y,k)$ il valore della capacità produttiva mediante un aumento di y_i.

Se i e l hanno $D_i \phi(y,k) \neq 0$ e $D_l \phi(y,k) \neq 0$, abbiamo

$$\frac{p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y)}{D_i \phi(y,k)} = \frac{p_l(y) + \sum_j y_j D_l p_j(y)}{D_l \phi(y,k)} = -\sigma,$$

o se preferiamo

$$\frac{p_i(y) + \sum_j y_j D_i p_j(y)}{p_l(y) + \sum_j y_j D_l p_j(y)} = \frac{D_i \phi(y,k)}{D_l \phi(y,k)} = \tau_{i,l}.$$

Il rapporto tra il profitto marginale del bene i e quello del bene l è uguale, nelle condizioni di massimo, a $\tau_{i,l}$.

Il numero σ, che abbiamo visto entrare in $p(y) + yDp(y) + \sigma D\phi(y,k) = 0$, deve essere interpretato come il prezzo massimo (il compenso minimo), in termini di profitto, che l'impresa sarebbe disposta a pagare (ricevere) per ottenere (accettare) di allentare (restingere) il vincolo tecnologico.

12.1 convenienza a modificare la capacità produttiva

Cambiamenti nella capacità produttiva dell'impresa non sono piccole variazioni, rappresentabili mediante il calcolo differenziale, come quelle nel processo di produzione y. Si tratta di creare un nuovo stabilimento, di comprare o vendere una macchina, di assumere o licenziare dei lavoratori specializzati. Vediamo come si deve ragionare per calcolare la convenienza o meno di una simile operazione.

Data la capacità produttiva dell'impresa, che abbiamo indicato con k e che entra nella definizione del vincolo $\phi(y,k)$ tecnologico, seguendo la direzione via via ottimale si arriva ad avere un massimo valore per il profitto. Se la sede di massimo è unica, questo massimo profitto diventa una funzione di k che possiamo indicare con $r(k)$.

Un cambiamento di k da k' a k'', si deve presumere che permetta di passare da un profitto $r(k')$ ad uno atteso $r(k'')$.

D'altra parte questo passaggio, quando $r(k'') > r(k')$, si deve pensare che risulti costoso o, quando $r(k'') < r(k')$, fonte di ricavi. Indichiamo con $C(k',k'')$ il valore di questo passaggio. Se esso è costoso sarà $C(k',k'') > 0$. Se fonte di ricavi sarà $C(k',k'') < 0$. Su questo valore l'impresa paga degli interessi, se $C(k',k'') > 0$, $i_+ C(k',k'')$, o li guadagna, se $C(k',k'') < 0$, $-i_- C(k',k'')$. Se l'impresa è indebitata si può presumere che $i_- = i_+$: quanto essa ricava quando $C(k',k'') < 0$ va a riduzione del debito e quindi consente di risparmiare il tasso, più alto, che si paga sul debito. Se non lo è si può pensare che $i_- < i_+$.

La convenienza a cambiare la capacità produttiva sarà data da

$$r(k'') - r(k') - iC(k', k'') > 0,$$

laddove i sarà, a seconda dei casi, i_- o i_+.

12.2 nessi nel comportamento di più imprese

Introduciamo ora una seconda impresa il cui comportamento si riflette su quello della prima attraverso la funzione dei prezzi. Questi diventano una funzione sia del processo di produzione che fa la prima, y', che di quello che fa la seconda, y''. Abbiamo quindi che il profitto della prima sarà

$$f_1(y', y'') = y' p(y' + y''),$$

quello della seconda

$$f_2(y', y'') = y'' p(y' + y'').$$

Queste imprese sono soggette al loro vincolo tecnologico,

$$\phi_1(y', k') \geq 0$$

la prima e

$$\phi_2(y'', k'') \geq 0$$

la seconda.

Come si vede il vincolo tecnologico di ciascuna non dipende da cosa fa l'altra. E' invece il profitto, tramite l'influenza del processo di produzione dell'altro sui prezzi, che dipende non solo da cosa fa l'impresa ma anche da cosa fa l'altra.

Entrambe le imprese vogliono massimizzare il loro profitto.

Siamo quindi nello schema di azione complessiva con due soggetti e conseguenze per ciascuno dei due. L'azione complessiva sarà (y', y''). Se i soggetti devono decidere non sapendo cosa fa l'altro, ognuno farà una congettura su quello che farà l'altro e quindi sceglierà per sé quel processo che gli consenta, ferma la congettura, di massimizzare il suo profitto. La congettura $(y'^{\circ}, y''^{\circ})$ è un equilibrio di Nash se verifica, oltre che i vincoli

$$\phi_1(y'^{\circ}, k') \geq 0 \quad e \quad \phi_2(y''^{\circ}, k'') \geq 0,$$

la condizione

$$f_1(y'^{\circ}, y''^{\circ}) - f_1(y', y''^{\circ}) = y'^{\circ} p(y'^{\circ} + y''^{\circ}) - y' p(y' + y''^{\circ}) \geq 0$$

con $\phi_1(y', k') \geq 0$ per ogni y' e

$$f_2(y'^{\circ}, y''^{\circ}) - f_2(y'^{\circ}, y'') = y''^{\circ} p(y'^{\circ} + y''^{\circ}) - y'' p(y'^{\circ} + y'') \geq 0$$

con $\phi_2(y'', k'') \geq 0$ per ogni y''.

Il caso può essere ulteriormente generalizzato introducendo altre imprese. I prezzi diventeranno una funzione della somma dei processi fatti da tutte queste imprese, l'azione complessiva sarà composta da quello che fa ciascuna impresa. La sostanza non cambia.

Il vero problema è per quale ragione le imprese non dovrebbero concordare la loro azione avendo come obiettivo di massimizzare il profitto complessivo continuando ciascuna a verificare il suo vincolo tecnologico? Il probema diventerebbe, restiamo al caso di 2 sole imprese, quello di massimizzare

$$f_1(y', y'') + f_2(y', y''),$$

rispettando i vincoli

$$\phi_1(y', k') \geq 0 \quad e \quad \phi_2(y'', k'') \geq 0.$$

Normalmente il massimo di questo problema sarà maggiore della somma dei profitti che riuscirebbero a fare queste imprese se non concordassero il loro comportamento. Ogni soluzione non concordata potrebbe infatti essere realizzata per accordo.

Nel caso di accordo resterebbe il problema di come ripartirsi il profitto complessivo. Non è difficile trovare una soluzione visto che, se nei due casi il profitto complessivo non è uguale, si tratta di distribuire una aggiunta al profitto rispetto a quanto ciascuna impresa avrebbe non mettendosi d'accordo.

Vi sono delle autorità, quelle che vigilano che non vi siano accordi che limitino la concorrenza, ciò che nel nostro caso di fatto accadrebbe, che dovrebbero comminare delle multe ai danni di chi questi accordi stipula. Tuttavia dimostrare l'esistenza di tali accordi non è facile.

Spesso questi accordi prendono la forma molto esplicita della fusione tra le imprese. Questa di solito viene giustificata come un mezzo per aumentare l'efficienza delle imprese che si fondono eliminando dei centri di costo che ora diventerebbero degli inutili duplicati. Giustificazione certamente valida ma che dice solo parte della verità, l'altra consiste nei vantaggi ottenuti coordinandosi per accrescere i profitti anche prescindendo da riduzioni nei costi complessivi.

Le imprese che accordandosi aumentano i loro profitti sottraggono denaro alle loro controparti, che possono essere altre imprese ma, soprattutto, i consumatori finali. Nei racconti popolari si immagina che le imprese, diventando sempre più efficienti, anziché aumentare i loro profitti, nella forma di super stipendi ai capi, di super dividendi agli azionisti, aumenti dei mezzi propri dell'impresa con cui magari finire col fare investimenti avventuristici, riducano il prezzo dei loro prodotti con gioia dei consumatori. Questi racconti magnificano questo meccanismo come concorrenza. In realtà la così detta concorrenza funziona ben di rado, in particolari momenti, in certi settori, quando si realizza il meccanismo che segue.

Se le imprese esistenti tengono alti i prezzi dei loro prodotti, anche perchè la loro produzione complessiva è limitata rispetto alla capacità di assorbimento del mercato, esse realizzano degli extraprofitti non giustificati dai capitali investiti nell'impresa o dalla attività del proprietario che la dirige. Questi extra profitti inducono nuove imprese a nascere per realizzare anch'esse questi extraprofitti. In tal modo aumenta l'offerta dei prodotti di queste imprese e la domanda dei fattori che esse utilizzano. Perchè questi prodotti aggiuntivi vengano assorbiti dal mercato bisogna che i loro prezzi scendano e che quelli dei fattori richiesti in più salgano. Ma così si riducono gli extra profitti fino a che il settore raggiunge un suo equilibrio nel quale i prezzi dei prodotti sono scesi, quelli dei fattori sono saliti e gli extraprofitti sono scomparsi.

Il meccanismo descritto qualche volta funziona ma molto spesso no. Quello che può accadere, e di fatto per lo più si verifica, è che se una o più imprese realizzano degli extraprofitti, una nuova impresa che volesse entrare nel settore dovrebbe sostenere dei costi fissi iniziali molto ingenti che potrebbe ricuperare solo vendendo grandi quantità del prodotto. La potenziale impresa si rende conto che un aumento così ingente nell'offerta del prodotto potrebbe essere assorbita dal mercato solo con una consistente riduzione dei prezzi, ma, se questo è il caso, l'impresa rischia di non ricuperare i costi fissi iniziali e di subire una perdita. Con questa consapevolezza essa non entra in questo settore, anche se si rende ben conto che attualmente le imprese che vi operano realizzano dei bei extraprofitti.

Il meccanismo concorrenziale prima descritto può solo funzionare se i costi fissi iniziali sono bassi, e quindi la nuova impresa può assorbirli mediante un modesto aumento dell'offerta complessiva del prodotto, questo porta a modeste riduzioni del prezzo del prodotto e quindi non annulla il super profitto della nuova impresa. Continuano ad entrare nuove imprese finché gli extraprofitti saranno scomparsi.

Se valgono le ipotesi per cui Y diventa un cono, quindi se

$$y \in Y \wedge \mu \in \Re_+ \Longrightarrow \mu y \in Y,$$

$\Re_+$ è l'insieeme dei reali non negativi, le condizioni che garantiscono la concorrenza sono verificate, infatti si può allargare o restringere il processo produttivo per quantità quanto si vuole piccole. Anzi, il singolo consumatore potrebbe produrre da solo i beni che gli interessano, acquistando i fattori che gli mancano e vendendo i prodotti che non gli interessano ed ottenuti congiuntamente, nel processo di produzione, a quelli a cui è interessato. Il consumatore avrebbe convenienza a fare quanto descritto appena l'impresa volesse realizzare un profitto che non sia la retribuzione di qualche fattore. Purtroppo le condizioni per cui Y diventa un cono sono davvero troppo poco realistiche per prenderle sul serio.

13 *Allocazioni ottimali ed equilibri

Partiamo da una allocazione iniziale, x°, essa ci dice come inizialmente i beni esistenti nell'economia, $d\left(x^\circ\right)$, sono distribuiti tra i diversi soggetti. $x^{i\circ}$, la colonna $i-esima$ di x°, indica i beni del soggetto $i-esimo$ che inizialmente egli possiede. $S\left(x^\circ\right)$ sono le allocazioni dominanti x° che sono raggiungibili mediante lo scambio a partire da x°.

Le preferenze sono assunte individualistiche e transitive.

13.1 processi di scambio

Un processo di scambio può essere concepito come un **sentiero di allocazioni** $s =: (x(1), x(2), ..., x(l+1))$ in cui $x(1) = x^\circ$ e tale che $x(i+1) \in S(x(i))$. In questo caso il sentiero ha l passi, il primo porta da $x(1)$ a $x(2)$, il secondo $x(2)$ a $x(3)$, quello $j-esimo$ da $x(j)$ a $x(j+1)$, l'ultimo porta da $x(l)$ a $x(l+1)$. Il sentiero parte da $x(1)$ ed arriva in $x(l+1)$ mediante l passi. Ogni passo vede $d(x(j+1)) = d(x(j))$ e $x(j+1) \in D(x(j))$; la dotazione complessiva resta quella iniziale e tutti i soggetti che cambiano i loro possessi passano ad avere dei possessi che considerano migliori. Tutti i soggetti che, partendo da $x(1)$, vedono in $x(l+1)$ un cambiamento nei loro possessi, sono saliti nelle loro preferenze.

Un sentiero è **allungabile** quando nella sua ultima allocazione, $x(l+1)$, $S(x(l+1)) \neq \emptyset$. Quindi non è allungabile se e solo se

$$S(x(l+1)) = \emptyset.$$

In questo caso $x(l+1)$ è un ottimo di scambio che domina x°.

Possiamo indicare con

$$O_s(x^\circ) =: \{x \in S(x^\circ) | tali \quad che \quad S(x) = \emptyset\},$$

l'insieme delle **allocazioni ottimali di scambio che dominano la allocazione iniziale** x°.

Qualora x° sia già una allocazione ottimale di scambio, $O_s(x^\circ) = \emptyset$.

Se $d(x^\circ) = d(x^{\circ\circ})$, le due allocazioni distribuiscono tra i diversi soggetti la stessa dotazione complessiva. Non per questo $O_s(x^\circ) = O_s(x^{\circ\circ})$. Se un soggetto parte in x° con una posizione già alta nelle sue preferenze o resta nel suo stato iniziale oppure in tutti gli elementi in $O_s(x^\circ)$ deve essere salito ulteriormente. Se in $x^{\circ\circ}$ egli parte molto più in basso nelle sue preferenze, in $O_s(x^{\circ\circ})$ vi saranno anche delle situazioni per lui appena migliori di quella ora per lui iniziale e certamente peggiori di quella in cui si trovava in x°. La diversa posizione iniziale può decidere dove il soggetto può arrivare quando, con un processo di scambio, sia raggiunta una allocazione ottimale di scambio.

Se vi sono solo due soggetti e la dotazione complessiva è d°, abbiamo necessariamente che $x^2 = d^\circ - x^1$. Per fare un passo su di un sentiero di scambi, da x a x', bisogna che

$$x'^1 \in P^1(x^1) \quad e \quad d^\circ - x'^1 \in P^2(d^\circ - x^1),$$

che può anche scriversi,

$$x'^1 \in P^1(x^1) \quad e \quad x'^1 \in d^\circ - P^2(d^\circ - x^1),$$

da cui

$$x'^1 \in P^1(x^1) \cap d^\circ - P^2(d^\circ - x^1).$$

Si può prendere x'^1 più alto nelle preferenze del soggetto 1, basta che, come condizione, rimanga $x'^1 \in d^\circ - P^2(d^\circ - x^1)$, in tal modo il vantaggio delle scambio andrebbe soprattutto al soggetto 1. Con un sentiero di questo genere, se alla fine arriviamo ad un ottimo di scambio, questo avrà visto crescere nelle preferenze soprattutto il soggetto 1, ed il soggetto 2 appena quanto basti perchè egli aderisca ad ogni passo-scambio. Se già inizialmente il soggetto 1 stava alto nelle sue preferenze, il sentiero di scambi di quel genere avrà ancora accresciuto il suo vantaggio concedendo pochi vantaggi al soggetto 2.

Se vi sono 3 soggetti per fare un passo su di un sentiero di scambi, da x a x', che li coinvolga tutti, bisogna che

$$x'^1 \in P^1(x^1), \quad x'^2 \in P^2(x^2) \quad e \quad d^\circ - x'^1 - x'^2 \in P^3(d^\circ - x^1 - x^2),$$

da cui

$$x'^1 \in P^1(x^1) \cap d^\circ - x'^2 - P^3(d^\circ - x^1 - x^2),\ x'^2 \in P^2(x^2).$$

Anche qui il soggetto 1 può prendersi gran parte del vantaggio dello scambio se agli altri due viene concesso soltanto un piccolo miglioramento. Si potrebbe continuare ad aggiungere soggetti e le formule vedrebbero sempre un ultimo soggetto che deve avere uno spostamento nei beni in suo possesso che mantenga nullo lo spostamento nella dotazione complessiva.

La discussione precedente non vuol dire che necessariamente deve essere l'ultimo soggetto ad assicurarsi pochi vantaggi dallo scambio, potrebbe infatti essere lui il maggiore beneficiario, ma solo che anche nello scambio è importante considerare la distribuzione tra i soggetti del vantaggio complessivo che lo scambio può generare.

Se un processo di scambio, partendo da x° arriva in $\overline{x} \in O_s(x^\circ)$, possiamo accorciare il sentiero ad un solo passo che da x° porti direttamente in $\overline{x}$, infatti tutti i soggetti che hanno in $\overline{x}$ la loro colonna diversa da come era in x° devono, nel passo che li ha coinvolti, essere saliti nelle preferenze. Quindi $\overline{x}$ domina x°.

Se $O_s(x^\circ) = \emptyset$, non esistendo allocazioni dominanti raggiungibili col solo scambio, vuol dire, in termini di arricchimenti, che $0 \notin A(\overline{x})$.

13.2 equilibrio di scambio

Se le preferenze, oltre che individualistiche e transitive, sono anche convesse e localmente nonsature, sappiamo già che vale

$$A(x) = \sum_{i \in M} \left[P^i(x^i) - x^i\right],$$

gli arricchimenti sono la somma degli arricchimenti individuali; inoltre, in questo caso, gli insiemi $P^i(x^i) - x^i$ sono convessi ed aperti. Ma allora $A(x)$ diventa la somma di un numero finito di insiemi convessi ed aperti. Come tale, non stiamo a dimostrarlo, anche $A(x)$ deve essere convesso ed aperto.

Se $\overline{x} \in O_s(x^\circ)$ deve essere $0 \notin A(\overline{x})$. Inoltre sappiamo che

$$A^i(x) = P^i(x^i) - x^i \subset A(x).$$

C'è un teorema, che non dimostriamo, che dice che se $0 \notin A(\overline{x})$, con $A(\overline{x})$ aperto e convesso, esiste un vettore di prezzi $p \in \Re^n$ tale che

$$\forall h \in A(\overline{x}) \quad vale \quad hp > 0.$$

Questo vettore di prezzi è un sistema di **prezzi impliciti nella allocazione**, ottimale di scambio, $\overline{x}$.

Ma allora, siccome $A^i(x) = P^i(x^i) - x^i \subset A(x)$, abbiamo che p è un **sistema di prezzi impliciti comune a tutti i soggetti**, vale cioè per ogni i,

$$h^i \in A^i(\overline{x}) \Longrightarrow h^i p > 0,$$

che equivale a dire che

$$se \quad h^i + \overline{x}^i \in P^i(\overline{x}^i) \quad vale \quad \left(h^i + \overline{x}^i\right) p > \overline{x}^i p.$$

Indichiamo con $\phi(x)$ l'insieme dei prezzi impliciti nella allocazione ottimale di scambio $x \in O_s(x^\circ)$.

Possiamo valutare per $p \in \phi(x)$ come è cambiato il valore dei beni posseduti da ogni soggetto passando da x° ad x. Considerando p come un vettore riga, $px^{i\circ}$ e px^i indicano il valore iniziale e finale dei beni posseduti da i.

$$p(x - x^\circ) = \left(\left(px^1 - px^{1\circ}\right), \left(px^2 - px^{2\circ}\right), ..., \left(px^m - px^{m\circ}\right)\right)$$

è il vettore riga ottenuto moltiplicando il vettore dei prezzi per la matrice $x - x^\circ$. Questa rappresenta i cambiamenti intervenuti nei beni di ogni soggetto passando da x° ad x. Se sommiamo le componenti di $p(x - x^\circ)$ otteniamo lo 0. Infatti

$$\sum_i \left(px^i - px^{i\circ}\right) = p\left(\sum_i x^i - \sum_i x^{i\circ}\right) = p\left(d(x) - d(x^\circ)\right) = p0.$$

Ma allora, se un soggetto ha guadagnato nel passaggio, $px^i - px^{i\circ} > 0$, deve esserci un altro che invece ha perso, $px^j - px^{j\circ} < 0$.

Diciamo che $x \in O_s(x^\circ)$ è un **equilibrio di scambio** con lo stato iniziale x° se esiste un $p \in \phi(x)$ tale

$$\forall i \in M \quad px^i - px^{i\circ} = 0.$$

In questo caso, passando da x°, stato iniziale, ad x, stato finale, abbiamo realizzato le seguenti condizioni;

a) tutti i soggetti che vedono cambiare i loro possessi salgono nelle loro preferenze mentre nel complesso i beni dell'economia restano fermi,

b) nello stato finale non sono più possibili ulteriori scambi,

c) esiste un sistema di prezzi per cui ogni cambiamento dallo stato finale che risulti vantaggioso per qualcuno risulti anche costoso: avrebbe un valore, a quei prezzi, positivo,

d) il cambiamento, per ciascuno, dallo stato iniziale a quello finale, ha, a quei prezzi, valore zero.

Esistono dei teoremi che garantiscono che, nelle condizioni sulle preferenze sopra precisate, esiste almeno un equilibrio di scambio associato ad ogni allocazione iniziale che non sia già ottimale di scambio.

Nel caso in cui la allocazione iniziale sia già ottimale, esistono dei prezzi impliciti comuni nello stato iniziale. Si può considerare lo stato iniziale, con quei prezzi, come un equilibrio.

Quando valgono le condizioni che permettono, per ogni soggetto, di costruire la sua funzione di domanda, l'equilibrio di scambio può essere concepito come segue.

Sia $d^i(p, s_i)$ la funzione di domanda del soggetto $i - esimo$. Facciamo $s_i = px^{i\circ}$: il soggetto spende il valore dei beni che possiede inizialmente calcolato ai prezzi che entrano nella sua funzione di domanda. La $d^i(p, s_i)$ diventa allora $d^i\left(p, px^{i\circ}\right)$, funzione di p e di $x^{i\circ}$, i beni posseduti da i nella allocazione iniziale. La funzione di domanda dell'economia, $d(p, x^\circ)$, sarà

$$d(p, x^\circ) =: \sum_i d^i\left(p, px^{i\circ}\right).$$

Abbiamo equilibrio di scambio quando è verificata la equazione in p,

$$d(p, x^\circ) - d(x^\circ) = 0,$$

che, scritta in forma distesa, diventa

$$\forall j \quad d_j(p, x^\circ) - d_j(x^\circ) = 0,$$

la domanda complessiva di ciascun bene, al sistema di prezzi p, **prezzi di equilibrio**, deve essere uguale alla disponibilità complessiva dello stesso bene. Ai prezzi p vale necessariamente, $s_i = px^{i\circ}$ e $s_i = pd^i\left(p, px^{i\circ}\right)$, quindi

$$\forall i \quad pd^i\left(p, px^{i\circ}\right) - px^{i\circ} = 0.$$

Chiamiamo **di domanda** questo genere di **equilibrio**.

Anche in questo caso esistono dei teoremi che dimostrano che questo equilibrio esiste.

Normalmente i prezzi di equilibrio cambiano se cambia la allocazione iniziale. Non è detto che, data questa, il vettore dei prezzi di equilibrio sia unico.

Si dimostra anche che l'equilibrio di domanda ora descritto è anche un equilibrio di scambio nella accezione che abbiamo data prima. Il vantaggio della prima versione di equilibrio è che è più generale della seconda, non richiede che le preferenze siano tali da consentire di costruire una funzione di domanda.

13.3 equilibrio e produzione

Un modo per inserire la produzione nello schema dello scambio ora descritto può essere il seguente.

Immaginiamo la produzione come uno scambio con la natura, il processo di produzione può essere pensato come una cessione della natura al resto dell'economia, quella costituita dagli m soggetti. Se $y \in Y$ è un processo di produzione tecnicamente possibile, la natura, cedendo al resto dell'economia y, si priva dei beni che in y risultano in quantità positiva ma assorbe quelli che vi appaiono in quantità negativa. Le preferenze della natura consistono semplicemente nel preferire i processi possibili, quelli in Y, a quelli che non lo sono, quelli in $\Re^n/Y$.

Possiamo indicare con

$$O_g(x^\circ) =: \{x \in [G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)] \cup S(x^\circ) \mid \quad [G(d(x), Y) \cap D(x)] \cup S(x) = \emptyset\},$$

l'insieme delle **allocazioni ottimali globali** che dominano la allocazione iniziale x°. Esse dominano x°, sono raggiungibili da x° con produzione o con scambio, ma a loro volta non hanno allocazioni dominanti che siano raggiungibili.

Qualora x° sia già una allocazione ottimale globale, $O_g(x^\circ) = \emptyset$.

13.3.1 ipotesi sull'insieme dei processi produttivi tecnicamente possibili, Y

Una ipotesi naturale su Y è che Y sia **chiuso**. Essa stabilisce che se $y^\circ \in R^n$ ha elementi di Y quanto si voglia vicini a y° allora anche $y^\circ \in Y$.

Se $0 \in Y$, è possibile l'**inattività**, uno scambio può essere considerato come un caso particolare di produzione, il processo produttivo coinvolto nello scambio è quello di inattività. In questo caso abbiamo

$$\{G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)\} \cup S(x^\circ) = \{G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ)\},$$

e quindi anche

$$O_g(x^\circ) = \{x \in G(d(x^\circ), Y) \cap D(x^\circ) \,| G(d(x), Y) \cap D(x) = \emptyset\},$$

le allocazioni ottimali globali che dominano x° sono quelle raggiungibili che dominano x° e che a loro volta non ne hanno di dominanti raggiungibili.

Se vale la **additività** dei processi produttivi,

$$y' \in Y \wedge y'' \in Y \Rightarrow y' + y'' \in Y.$$

In questo caso $x' \in G(d(x^\circ), Y)$ e $x'' \in G(d(x'), Y)$ implica anche $x'' \in G(d(x^\circ), Y)$. Infatti $d(x') - d(x^\circ) \in Y$ e $d(x'') - d(x') \in Y$ implica che $d(x'') - d(x^\circ) = (d(x'') - d(x')) + (d(x') - d(x^\circ)) \in Y$. Per cui

$$x' \in G(d(x^\circ), Y) \Rightarrow G(d(x'), Y) \subset G(d(x^\circ), Y),$$

le allocazioni raggiungibili da x° contengono quelle raggiungibili da una allocazione raggiungibile da x°.

Una ulteriore ipotesi che può essere fatta sulla produzione è quella della **convessità di** Y. E' questa una ipotesi utile per trovare dei risultati teorici, per questo è una ipotesi tradizionale, tuttavia è molto poco realistica. Essa stabilisce che se $y' \in Y$ e $y'' \in Y$ è tecnicamente possibile il processo $\mu y' + (1-\mu)\, y'' \in Y$ per $\mu \in (0,1)$. Per capirne lo scarso realismo immaginiamoci un processo produttivo nel quale una pressa taglia in una certa forma una lamiera ed un altro nel quale viene lanciato un missile per collocare in orbita un satellite di telecomunicazioni. Non pare possibile fare il processo in cui si dimezzano i due processi, è anche difficile solo immaginare un simile processo misto.

Le ipotesi su Y di additività, convessità ed inattività implicano che Y sia un **cono**:

$$y \in Y \wedge \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda y \in Y,$$

se un processo di produzione è possibile allora è possibile anche il processo ottenuto dal primo moltiplicato per qualsiasi numero reale non negativo. Infatti per l'inattività e per la convessità, se

$$y \in Y \wedge \mu \in [0,1] \Rightarrow \mu y = \mu y + (1-\mu)\, 0 \in Y$$

e se λ è un reale non minore di 1, esso può essere scritto come $\lambda = q + \mu$ dove q è un numero naturale e $\mu \in [0,1)$. Per la additività se $y \in Y$ anche $2y = y + y \in Y$, di conseguenza anche $3y = 2y + y \in Y$ ed in genere $qy = y\,(q-1) + y \in Y$. Per l'additività anche $\lambda y = qy + \mu y \in Y$.

13.3.2 equilibri con produzione

Facendo su Y tutte le ipotesi che abbiamo qui introdotte e sulle preferenze quelle usate per avere un equilibrio di scambio, si potrebbe dimostrare che, se x° non è già una allocazione ottimale globale, esiste una allocazione in $x' \in O_g\,(x^\circ)$ in cui esistono dei prezzi impliciti comuni, p, per i quali vale $\forall i \in M \quad px'^{i} - px^{i\circ} = 0$ ed anche $pd\,(x') - pd\,(x^\circ) = 0$. Le condizioni dell'equilibrio di scambio sono tutte verificate tranne che ora la dotazione complessiva può essere cambiata grazie ad un processo di produzione tecnicamente possibile, $d\,(x') - d\,(x^\circ)$, ed il cui valore, ai prezzi impliciti comuni, è 0. Il processo produttivo ha un profitto nullo.

Richiedere che il profitto del processo sia nullo ai prezzi di equilibrio si giustifica, quando Y è un cono, ragionando come segue. Se $py < 0$ deve essere $y \neq 0$ ed è possibile contrarre il processo ottenendo il processo, ancora possibile, μy con $\mu \in (0,1)$, ottenendo un cambiamento nella dotazione complessiva di beni in x' pari a $-(1-\mu)\, y$ che ai prezzi p ha un valore positivo. Se $py > 0$ deve essere $y \neq 0$ ed è possibile espandere il processo ottenendo quello, ancora possibile, $(1+\mu)\, y$ con $\mu \in (0,1)$, ottenendo un cambiamento nella dotazione complessiva di beni in x' pari a μy che ai prezzi p ha un valore positivo. Si può dimostrare che quando il bordo dei preferiti è liscio (può essere approssimato dallo spazio tangente), se p è un sistema di prezzi impliciti per un soggetto, e nel nostro caso lo è per tutti, e $ph > 0$, se $|h|$ è abbastanza piccolo, h è un arricchimento. Quindi in particolare lo sarà, con $py < 0$, $-(1-\mu)\, y$ per μ a sufficienza vicino a 1, e, con $py > 0$, μy per μ a sufficienza vicino a 0. Ma ciò è contro l'ottimalità di x'.

Analogamente per l'equilibrio di domanda. Si può immaginare che nella produzione, dati i prezzi p, si cerchi di massimizzare il profitto, py per $y \in Y$. La domanda della natura diventa $-y = d^n(p,Y)$ dove $y \in Y$, con la natura che si accontenta di minimizzare il valore della sua domanda, massimizzare py equivale a minimizzare $-py$. Quando Y è un cono un processo produttivo che massimizza il profitto, a prezzi dati, deve avere un profitto pari a 0. Se il profitto fosse negativo converrebbe l'inattività, se fosse positivo converrebbe raddoppiare il processo. Abbiamo equilibrio di domanda quando in una allocazione globale ottimale

$$d^n(p,Y) + \sum_i d^i\left(p, px^{i\circ}\right) = d\left(x^\circ\right), \quad pd^n(p,Y) = 0.$$

Per come è costruita la funzione di domanda individuale, $\forall i \quad pd^i\left(p, px^{i\circ}\right) - px^{i\circ} = 0$. Questo equilibrio può essere concepito come il risultato di processi massimizzanti ai prezzi di equilibrio; i consumatori massimizzano la loro utilità dato il vincolo di bilancio e la produzione massimizza il profitto muovendosi in Y.

Abbandonando le ipotesi sulla produzione introdotte per avere i due tipi di equilibrio ora descritti, e specificamente quella di convessità, il concetto di equilibrio di cui dobbiamo accontentarci, se x° non è già una allocazione ottimale globale, può essere il seguente. Sia $x' \in O_g\left(x^\circ\right)$ e sia $p \in \phi\left(x'\right)$ abbiamo equilibrio globale quando vale

$$\forall i \in M \quad \left(px'^i - px^{i\circ} = 0 \quad \vee \quad px'^i - px^{i\circ} \quad ha \quad segno \quad costante\right).$$

Non ci possono essere dei soggetti che vedono salire il valore dei loro possessi mentre altri li vedono ridursi.

Siccome in ogni caso deve essere

$$\sum_i x'^i - y - \sum_i x^{i\circ} = 0,$$

deve essere anche

$$\sum_i p\left(x'^i - x^{\circ i}\right) = py,$$

per cui la condizione di equilibrio può scriversi come

$$se \quad py \neq 0 \quad \forall i \in M \quad \left[p\left(x'^i - x^{\circ i}\right)\right] py \geq 0$$

e

$$se \quad py = 0 \quad \forall i \in M \quad p\left(x'^i - x^{\circ i}\right) = 0.$$

Se il processo di produzione è in utile, $py > 0$, o in perdita, $py < 0$, questo/a deve essere ripartito/a, magari con quote nulle per qualcuno, tra tutti i soggetti il cui valore dei possessi cambia. Il motivo di questa condizione è di evitare che ci sia chi guadagna da un processo di produzione in perdita o chi perde con un processo in utile.

Non si può tuttavia ritenere che quest'ultima condizione sia ovviamente necessaria. Infatti, per la dominanza, nella allocazione finale tutti quelli che vedono i loro possessi cambiati considerano tale cambiamento per loro giovevole. Il fatto che il processo di produzione sia in perdita, $py < 0$, non vuol dire che esso non sia conveniente. La convenienza è garantita dal fatto che la allocazione finale domina quella iniziale.

Se x° è già una allocazione ottimale globale, e valgono le condizioni sulle preferenze usate nella definizione di equilibrio di scambio, esiste un $p \in \phi(x^\circ)$ per il quale le condizioni di equilibrio sono soddisfatte da x° stesso.

13.4 natura ed imprese

Abbiamo riferito il processo di produzione, che permette all'economia di passare da una allocazione ad un'altra avente una disponibilità globale diversa, alla natura. Di fatto i processi di produzione sono realizzati o dai singoli soggetti o da gruppi di soggetti organizzati insieme, le imprese. Siccome difficilmente si può davvero separare quello che fa una impresa da quello che fanno le altre, diventa più significativo guardare l'insieme di quello che fanno le diverse imprese come un tutto anziché come la somma di quello che fa ciascuna.

Per meglio afferrare le ragioni di questa scelta vediamo come si dovrebbe pensare ad un sistema di imprese che, realizzando ciascuna un processo, ottengono nel complesso il processo di produzione complessivo che abbiamo attribuito alla natura.

Dovremmo immaginare una impresa come un insieme di tecnologie, di processi di produzione possibili. Le imprese le possiamo etichettare mediante un numero naturale. Siccome se immaginiamo un numero specifico di imprese possiamo sempre immaginare che se ne formi una nuova, non ha senso immaginare un numero massimo di imprese. Per questo l'insieme delle possibili imprese deve pensarsi come minimo come l'insieme dei numeri naturali, N. Invece le imprese esistenti di fatto saranno necessariamente in numero finito. Quindi i possibili insiemi di imprese esistenti di fatto saranno concepiti come dei sottoinsiemi finiti di numeri naturali.

Indichiamo con 2_f^N l'insieme dei sottoinsiemi finiti e non vuoti di numeri naturali, N. Le imprese attive in un certo momento saranno un insieme $L \in 2_f^N$.

Con $Y_l \subset \Re^n$ indichiamo la tecnologia dell'impresa $l \in N$, i processi produttivi che essa è in grado di attivare. I processi complessivi che le imprese in $L \in 2_f^N$ sono in grado di attivare sono dati da

$$Y_L =: \sum_{l \in L} Y_l.$$

Quindi se $y \in Y_L$, $y = \sum_{l \in L} y_l$, y è ottenuto come somma di processi ciascuno realizzabile da una impresa del gruppo di quelle attive, prescindendo dalle altre che restano solo potenziali.

Vediamo ora quali sono le perdite di realismo insite in questo modo di vedere.

Pensiamo al caso in cui una impresa riesce a fare un certo processo perché altre intervengono a fare dei beni che entrano come fattori in esso, e con esse riesce a progettare e realizzare, scambiandosi competenze, quel particolare processo che produce beni che hanno caratteristiche specifiche ed eventualmente concordate e messe a punto con altre imprese che questi beni utilizzano come fattori.

Pensiamo ancora al caso in cui una impresa riesce a trovare i lavoratori qualificati di cui necessita proprio perché vi sono vicino altre imprese nelle quali agiscono dei lavoratori qualificati dai quali i primi possono apprendere il mestiere ed in ogni caso scambiare esperienze.

Casi come questi sono esperienza quotidiana e comune. Queste connessioni, che si chiamano **esternalità produttive**, diramano in molte direzioni ed in forme più o meno specifiche. Sembra allora difficile riuscire a descrivere tutto ciò in modo analitico e soprattutto delimitare i confini di ogni impresa. Per questo può convenire vedere tutto dall'alto, come un unico processo di produzione, rinunciando all'idea di considerarlo come somma di processi, ciascuno prodotto in una impresa separata dalle altre.

Alla fine siamo portati a rovesciare la visione che vedeva le imprese proporre la loro offerta ai soggetti finali dell'economia, i consumatori, per immaginare invece che siano i soggetti finali a ricorrere alla produzione per poter raggiungere delle allocazioni dominanti. In questa ottica le imprese sarebbero concepite come delle forme organizzative in cui il passaggio ad allocazioni dominanti prende forma realizzando un implicito coordinamento tra i soggetti finali. Chi riesce a concepire ed organizzare ciò riesce a garantirsi una parte significativa dei vantaggi ottenuti passando dalla allocazione iniziale a quella finale, e dominante, raggiunta anche attraverso un processo di produzione.

14 temi vari

14.1 aspettative, aspettative razionali e bolle

Molte operazioni di scambio sono motivate dall'idea di acquistare un bene non perchè dal suo possesso si immagina di averne un uso vantaggioso, ma contando di rivenderlo in futuro ad un prezzo più alto. Senza questa speranza il bene non sarebbe quindi acquistato.

Lo schema teorico con cui trattare questo caso già lo conosciamo. Acquistare o no quel bene sono due azioni diverse, le conseguenze dell'acquisto sono delle diverse somme di denaro a ciascuna delle quali si associa l'utilità della somma moltiplicata per la probabilità di realizzarla. Tali prodotti, per i diversi possibili risultati, si sommano fino ad avere l'utilità attesa dell'azione di comprare. Se non si compra si risparmia la spesa dell'acquisto avendo così la utilità della cifra risparmiata con probabilità 1. Si compra se l'utilità attesa dell'acquisto è maggiore di quella del mancato acquisto.

Un modo più semplice, per quanto più grossolano, di ragionare è quello delle **aspettative**. Queste sono una funzione del tempo, futuro, che indica il prezzo che ci si aspetta, ai diversi tempi futuri, per il bene che ci interessa.

$$\left\{p^i\left(t\right) \mid \quad t > 0\right\}$$

sono le aspettative del soggetto i circa il bene in oggetto. Con $p^\circ = p\left(0\right)$ indichiamo il **prezzo attuale**, corrente, del bene: quello a cui attualmente il bene può essere comprato o venduto.

Se $p^i\left(t\right) > p^\circ$ per $t \in (0, t')$ al soggetto i, portatore delle **aspettative, rialziste**, conviene comprare il bene. Al contrario se $p^i\left(t\right) < p^\circ$ per $t \in (0, t')$ al soggetto i, portatore delle aspettative, **ribassiste**, conviene vendere il bene. Se il prezzo corrente è p° vuol dire che c'è chi compra ma anche chi a quel prezzo vende il bene. Se il soggetto i ha un minimo di razionalità nel suo comportamento deve supporre che se c'è chi ha aspettative rialziste, e quindi compra, ci deve anche essere chi ha aspettative ribassiste e quindi vende. Ma allora la domanda che egli deve porsi, se le sue aspettative sono di un tipo o dell'altro, è "perchè c'è chi ha aspettative opposte alle sue". Per confermarsi nelle sue aspettative deve quindi pensare che chi le ha opposte alle sue sta sbagliando e spiegarsi l'errore attribuendolo a stupidità o scarsa informazione. Ma allora chi finisce col confermarsi nelle sue aspettative ritiene di essere mediamente più bravo degli altri operatori su quel mercato, di "battere il mercato". Se il soggetto non pensa che questo sia il caso le sue **aspettative** non possono che essere **neutrali**: $p^i\left(t\right) = p^\circ$ per $t \in (0, t')$.

Se su questo mercato operano soggetti che possono fare operazioni molto rilevanti, capaci di modificare percettibilmente il prezzo corrente, che spendono cifre anche consistenti per essere perfettamente informati e per riuscire ad elaborare le informazioni nel modo più corretto, diventa ragionevole immaginare che le aspettative debbano essere neutrali. Se infatti il prezzo corrente fosse tale da giustificare aspettative diverse, gli operatori più grandi e più informati sarebbero già intervenuti a comprare, se le aspettative corrette sono rialziste, o a vendere nel caso opposto, facendo muovere il prezzo corrente a quel livello per cui le aspettative corrette diventano quelle neutrali. Queste sono quindi le sole aspettative che, nelle condizioni descritte, è razionale avere da parte di chi non pensa di essere più informato e più capace di elaborare l'informazione di coloro che spendono cifre rilevanti per essere informati nel modo migliore.

Questi soggetti si asterranno quindi dal fare operazioni speculative su questo mercato, compreranno o venderanno soltanto in funzione dell'uso finale che intendono fare dello stesso bene. A tali soggetti non converrà nemmeno spendere tempo e denaro per informarsi, infatti in ogni caso ci sono altri che saranno più e meglio informati di loro. Si mette quindi in moto un processo di **selezione degli operatori informati**: siccome l'informazione è costosa essa conviene solo a chi, e saranno gli operatori più grandi, possa trarre maggiore profitto dal suo vantaggio informativo. Agli altri operatori, anche a quelli di dimensione rilevante ma non massima, non conviene più spendere denaro per essere informati.

Può ben accadere che ad uno stesso soggetto convenga avere aspettative neutrali per quasi tutti i mercati tranne pochi nei quali egli abbia ragione di pensare di poter battere il mercato.

Avere aspettative neutrali non significa aspettarsi che davvero il prezzo del bene resti costante, al trascorrere del tempo, al livello attuale. Anzi ci si stupirebbe se ciò finisse davvero per accadere. Infatti, col passare del tempo, accadono o vengono conosciuti degli accadimenti che non erano stati per nulla previsti, o ai quali era stata attribuita una probabilità inferiore ad 1 e la cui probabilità, quando accadono, diventa 1. Sono queste delle **novità** che, verificandosi, incidono sul prezzo al quale le aspettative diventano neutrali e quindi sospingono il prezzo corrente a cambiare. Se i prezzi correnti restassero fermi, per un tratto di tempo non trascurabile, ci stupiremmo perché vorrebbe dire che in esso non si sono verificate delle novità rilevanti per il mercato in questione.

14.1.1 *scenari alternativi

A volte si assiste a fenomeni particolari in cui si osserva un movimento dei prezzi correnti insistito e abbastanza prolungato in una sola direzione. Dovremmo quindi immaginare che le novità intervenute nel mentre siano tutte dello stesso segno ai fini dello spostamento del prezzo corrente. Tuttavia può essere che la spiegazione sia leggermente diversa.

Immaginiamo che l'operatore informato non arrivi, malgrado le sue informazioni, a formulare un sola previsione ma giunga a concepire dei possibili **scenari alternativi** che renderebbero plausibili, ciascuno, dei prezzi diversi per il bene di cui ci occupiamo. Indichiamo, per semplificare, con p° e con $p^{\circ\circ}$ tali prezzi, ciascuno relativo ad uno dei due scenari alternativi. Che prevalga uno scenario o l'altro, e quindi un prezzo p° o $p^{\circ\circ}$, dipende dal diffondersi della convinzione che prevalga alla fine uno dei due possibili scenari. π indichi la probabilità che prevalga, nell'opinione del mercato, il primo scenario. Il prezzo corretto, e quindi corrente, sarebbe allora

$$p(0) = \pi p^{\circ} + (1 - \pi) p^{\circ\circ}.$$

Per elaborare delle aspettative si dovrebbe allora avere delle aspettative su π, solo che queste, non essendo uno scenario evidentemente più plausibile dell'altro, possono essere le più diverse e tutte plausibili. D'altra parte se si diffonde la convinzione che uno scenario finisca per prevalere, diventa più probabile che esso in effetti si realizzi. Ma allora si tratta di prevedere quale sia lo scenario che diventerà quello stimato più probabile agli occhi dei più. Vince allora chi riesce ad anticipare prima degli altri questo processo socio-psicologico. In ballo è più il fiuto circa l'evolversi della pubblica opinione che la precisione e complessità dei ragionamenti economici.

Mentre il processo descritto si dispiega, possono emergere dei nuovi scenari la cui plausibilità può essere fondata più su estrapolazioni di quanto è già accaduto che su ragionamenti molto fondati. Se si è passati dallo scenario che giustificava $p^\circ < p^{\circ\circ}$ allo scenario che giustifica $p^{\circ\circ}$, è facile che venga immaginato un terzo scenario in cui $p^{\circ\circ\circ} > p^{\circ\circ}$ e che si tenda ora a privilegiare $p^{\circ\circ\circ}$ soprattutto perché in precedenza si è passati da p° a $p^{\circ\circ}$. Un succedersi unidirezionale di scenari via via meno plausibili per ragioni economiche, ma fondati sull'estrapolazione di un movimento affermatosi nel passato, può dar luogo ad una **bolla** speculativa che si dimostra tale solo se e quando essa scoppia dando luogo ad un repentino e marcato ridimensionamento delle aspettative nella direzione opposta a quella seguita mentre la bolla andava gonfiandosi.

14.2 asimmetria informativa

Immaginiamo due soggetti che vorrebbero stipulare un contratto ma che hanno informazioni diverse sui dati rilevanti al fine di determinare la convenienza del contratto. Mettiamoci nel caso in cui uno dei due (il principale) sia meno informato dell'altro (l'agente). Parliamo in questo caso di **asimmetria informativa**. In termini di eventi avremo che quelli del principale, E_p, sono un sottoinsieme proprio di quelli dell'agente, E_a,

$$E_p \neq E_a \wedge E_p \subset E_a.$$

La carenza di informazione può concernere delle condizioni che preesistono alla stipula del contratto, si parla in questo caso di **selezione avversa**, oppure di condizioni che dipendono dalla volontà dell'agente e che saranno definite dopo la stipula del contratto, si parla in questo caso di **azzardo** (rischio) **morale** (dovuto al comportamento dell'agente).

Situazioni di questo genere sono del tutto comuni, ad esempio, nei rapporti di lavoro e nei contratti di assicurazione.

Esempio. Un commerciante pensa di assumere una commessa cui affidare la gestione di uno dei negozi di sua proprietà. La ragazza sembra brava ed affidabile, essa tuttavia sa di essere di salute cagionevole e quindi dovrà fare molte assenze dal lavoro. Di ciò si guarda bene dall'informare il commerciante ma si mostra disponibile ad accettare uno stipendio relativamente modesto. Abbiamo un caso selezione avversa.

Se invece la ragazza gode di ottima salute ma pensa che una volta assunta si metterà a fare molte assenze accampando varie scuse per altro incontrollabili, siamo di fronte ad un caso di azzardo morale.#

Esempio. Una compagnia di assicurazione stabilisce una certa tariffa per l'assicurazione contro il furto, hanno convenienza ad assicurarsi coloro che sanno di essere particolarmente vulnerabili a questo genere di rischio per delle ragioni che l'assicurazione non conosce. Si assicurano quindi proprio coloro (agenti) che per la compagnia di assicurazione (principale) sono i clienti peggiori. Abbiamo selezione avversa.

Se invece l'assicurato, che non avrebbe particolari ragioni per assicurarsi, dopo aver stipulato il contratto trascura tutti quei comportamenti di prevenzione del furto, che prima, quando non era assicurato, adottava, abbiamo un caso di azzardo morale.#

La asimmetria informativa, di cui il principale è consapevole, può indurlo a non stipulare il contratto. Anzi può accadere che la stessa proposta di contratto induca chi riceve la proposta a dubitare di trovarsi in una situazione di asimmetria nella parte del principale, il meno informato, e quindi proprio per questo rifiuti di aderire al contratto.

Esempio. Sono anni che cerco di vendere un certo terreno ma le poche offerte che ho avuto finora avevano prezzi decisamente troppo bassi. Un bel giorno arriva uno che mi fa una offerta davvero allettante. Potrei allora chiedermi se questi non sappia qualcosa che riguarda il mio terreno, che io non so, e che lo valorizza in modo davvero consistente. Con questo dubbio mi rifiuto di aderire alla proposta apparentemente vantaggiosa.#

Questi casi ci ammaestrano su come sia difficile fare dei contratti in tutti quei casi in cui le motivazioni delle controparti non siano del tutto ovvie. E' ovvio perchè voglio comprare il pane dal panettiere e perchè lui è intenzionato a vendermelo, molto meno ovvio è il perchè Tizio voglia vendermi delle azioni di una sua società. Qui è lui molto meglio informato di me sullo stato effettivo della sua impresa, io non posso sapere se lui vuole semplicemente aumentare il capitale dell'impresa per fare degli ottimi investimenti che con i suoi soli capitali non potrebbe fare, oppure se mi vuole vendere a 100 quello che lui sa valere 10.

E' ovviamente più facile fare affari con gli stupidi che credono a quello che cerco di fargli credere anziché con coloro che sono giustamente diffidenti perchè consapevoli della asimmetria informativa a loro danno insita nella natura della proposta di contratto.

Se si dovessero fare affari solo con gli stupidi si rischierebbe di finire presto, infatti proprio perché stupidi essi finiscono presto i loro denari a favore dei furbi. Non è facile capitare proprio in quei rari casi in cui gli stupidi sono tanti e non sono ancora stati spogliati dei loro possessi ed hanno perso la memoria di precedenti episodi in cui la loro dabbenaggine li ha danneggiati. Episodi siffatti per un po' di tempo li hanno indotti ad essere sufficientemente, ed opportunamente, diffidenti. In alcuni casi questi sprovveduti hanno vissuto in condizioni di particolare tutela e protezione per ragioni particolari di cui per altro essi non sono stati consapevoli. Proprio questa protezione, di cui non sono coscienti, li può predisporre ad essere facile preda dei furbi di turno.

Un classico esempio di questo genere si ha quando i risparmiatori hanno fatto prestiti al loro stato che era uno stato democratico. Questo non poteva fare come un qualsiasi privato che prima si riempie di debiti e poi sparisce; i governanti non vogliono ammannire grandi danni alla massa dei loro elettori per il timore, giustificato, di perdere il potere che viene loro dal voto popolare. In questo caso elettori ed eletti hanno lo stesso interesse, potremmo dire che i risparmiatori fanno un contratto con sé stessi. Del tutto diverso è il caso in cui le controparti del contratto sono soggetti che hanno interessi diversi e contrapposti.

Alla fine bisogna rassegnarsi a fare affari con chi dei problemi di asimmetria informativa è ben consapevole. Si tratta quindi di superare la asimmetria di tanto quanto basta a realizzare il contratto. Nel caso di selezione avversa l'agente cerca di offrire un **segnale** che rappresenti una garanzia al principale inducendolo a superare la diffidenza che altrimenti lo tratterrebbe dallo stipulare il contratto. Nell'azzardo morale si tratta invece di **disegnare il contratto** in modo che l'agente abbia convenienza a comportarsi come il principale vorrebbe che egli si comporti.

Elaborare i termini del contratto in modo che le parti siano indotte a stipulare il contratto, malgrado la iniziale, ed altrimenti dirimente, asimmetria informativa, è mestiere non facile ed assai qualificato, adatto al professionista che sia capace di cogliere immediatamente la natura economica dei problemi e di avere fantasia e competenza giuridica per proporre soluzioni contratttuali adeguate.

Vediamo qualche accorgimento che può permettere di superare la iniziale asimmetria informativa.

Riprendiamo gli esempi precedenti.

La aspirante commessa può offrire come segnale, per superare il problema di selezione avversa, una lettera di dimissioni che il commerciante può esibire se ritiene conveniente licenziare la commessa perché le sue assenze, per altro giustificate, non sono compensate dalla sua bravura quando è presente.

Invece nel caso dell'azzardo morale la clausola contrattuale che consentirebbe di superare la diffidenza del commerciante potrebbe prevedere una decurtazione dello stipendio per ogni giornata di lavoro perduta.#

Il lettore non deve pensare che questi casi siano necessariamente consentiti e non vietati da leggi poste a tutela del lavoratore. Un eccesso di tutela ha tuttavia come effetto di non consentire di superare la asimmetria informativa che impediva di concludere il contratto.

#Nel caso del contratto di assicurazione il segnale offerto dall'aspirante assicurato per superare il problema di selezione avversa potrebbe essere il seguente: il primo anno egli si impegna a pagare un premio molto alto che verrà ridotto negli anni successivi se nel frattempo l'assicurato non ha subito furti. Questo segnale vuole trasmettere alla compagnia di assicurazione il messaggio del possibile assicurato di non essere un potenziale cliente particolarmente a rischio.

Nel caso di azzardo morale la compagnia può garantirsi un comportamento consono da parte dell'assicurato semplicemente imponendo un risarcimento solo parziale del danno: a causa della parte non coperta l'assicurato ha convenienza a comportarsi con la stessa accuratezza che userebbe se non fosse assicurato. Il contratto dovrebbe anche prevedere che l'assicurato non possa assicurare gli stessi oggetti anche con una seconda compagnia; in caso contrario egli potrebbe azzerare la parte non coperta assicurando con la seconda compagnia la parte non coperta dalla prima. In tal modo renderebbe vana la garanzia per la compagnia rappresentata dalla quota di danno che non sarebbe risarcito.#

proposte come nuova informazione Immaginiamo il caso in cui riceva una offerta per un terreno che da molto tempo non riesco a vendere. Potrei essere disposto a chiudere subito la trattativa. Tuttavia l'aver ricevuto la proposta mi può far sorgere il sospetto che chi l'ha formulata sia informato di qualcosa per cui il mio terreno ne risulti valorizzato. Questo mi può indurre a prender tempo prima di concludere la trattativa al fine di capire meglio perchè la mia controparte mi ha fatto la proposta.

In questo caso la proposta stessa può trasmettere informazione.

14.2.1 asimmetria informativa e reputazione

In molti casi alcune transazioni non sono una tantum ma possono ripetersi, più o meno con lo stesso contenuto, nel tempo. Il caso più tipico è quello in cui il compratore, il principale, acquista un prodotto della cui qualità potrà divenire consapevole solo al momento dell'uso del prodotto e spesso dopo che questo uso si è prolungato nel tempo. Se compro un giornale non posso leggerlo prima di comprarlo (a quel punto non lo comprerei nemmeno) per vedere se le notizie ed i commenti che fornisce sono tali da giustificare il prezzo che devo pagare.

Chi mi vende il prodotto, l'agente, dovrebbe conoscere la qualità del prodotto che mi vende ad un prezzo più alto di altri prodotti all'apparenza del tutto simili. Il caso in questione è dunque uno di selezione avversa. Si tratta allora, per il venditore, di offrire un segnale che induca il compratore a superare la sua giustificata diffidenza a pagare più caro un prodotto apparentemente simile ad un altro meno costoso.

Il segnale appropriato può consistere nel mostrare al compratore che un comportamento scorretto del venditore comporterebbe per lui, il venditore, una perdita ben maggiore del profitto che potrebbe realizzare da quella specifica transazione. I meccanismi per fare ciò sono disparati. Si pensi ad un negozio che per essere approntato richiede, prima ancora di iniziare la sua attività, un investimento ingente; se il negozio vende i suoi prodotti ad un prezzo troppo alto rispetto alla loro qualità non conquisterà una stabile clientela e quindi non riuscirà a ricuperare la spesa iniziale.

Un altro meccanismo classico è costituito dal **marchio**, in molti casi sotto uno stesso marchio vengono venduti prodotti diversi, la cui produzione non è minimamente collegata. Il costo totale di produrli insieme è la somma del produrli separatamente. Il marchio diventa un segnale: se infatti il cliente resta deluso da uno dei prodotti venduti sotto quel marchio tenderà a diventare diffidente anche verso gli altri prodotti che verranno venduti in futuro sotto quello stesso marchio. L'impresa proprietaria di quel marchio ha investito perchè il marchio acquisti una **reputazione** favorevole presso la potenziale clientela, non vuole distruggere questa costosa reputazione cercando di vendere ad un prezzo troppo alto un prodotto che si rivelerà scadente. Anzi...essa, proprio per evitare questo rischio, spenderà cifre rilevanti per essere certa della qualità dei suoi prodotti. Casi di questo genere sono importanti nell'industria alimentare, in quella farmaceutica, nell'abbigliamento di qualità, nell'industria dell'informazione (televisiva, editoriale, giornalistica della carta stampata), in quella dei trasporti, specialmente quelli aerei, nei beni di consumo durevoli, nei servizi di consulenza, in quelli medici e così via.

Il problema della reputazione può indurre le imprese ad essere molto accorte nella politica del personale. Un personale troppo mobile non garantisce l'impresa circa la qualità dei servizi che essa offre, tramite il suo personale, alla clientela, rischia quindi di non garantire l'impresa dai danni alla sua reputazione derivanti da comportamenti di azzardo morale messi in atto da dipendenti che pensano di cambiare presto il loro datore di lavoro.

Molti comportamenti degli stati o delle loro istituzioni, come dei partiti politici, possono essere compresi pensandoli come un problema di reputazione, che si tratta di costruire o di mantenere. Ad esempio l'esistenza ed il funzionamento del diritto penale può essere inteso come il tentativo di scoraggiare comportamenti antisociali creandosi una reputazione di capacità repressiva di tali comportamenti.

Nella pratica politica la reputazione è importante per i partiti politici. Non lo è altrettanto per il singolo uomo politico che sia titolare di un potere personale e che deve rendere conto del suo comportamento, al più, ai suoi elettori. Siccome questi lo giudicheranno solo in poche occasioni, egli ha meno remore a promettere ciò che sa di non poter mantenere o a scaricare sulle generazioni future, che non saranno chiamate a confermargli la loro fiducia, il costo della sua politica attuale.

La reputazione ha senso quando vi sono degli atti che verranno ripetuti in futuro e per i quali non vi è un ultimo atto dal quale sia possibile risalire secondo il meccanismo della induzione all'indietro. E' questa la ragione per cui le conclusioni a cui si arriva quando c'è un problema di reputazione sono diverse da quelle a cui arriviamo ad esempio nel gioco di entrata.

14.3 accesso all'informazione e costo dell'informazione

E' un pregiudizio diffuso quello per cui, ai fini della diffusione ed accessibilità della conoscenza, ciò che conta è poter accedere alle fonti da cui attingere le informazioni. Il mito sottostante può essere raccontato nella forma che segue. C'era una volta una ragazza di campagna terribilmente intelligente e desiderosa di apprendere, ma nel suo paese non c'erano libri e la città era troppo lontana per lei che era abbastanza povera. Per questo essa restò ignorante e di conseguenza trascinò la sua vita tra inquietudine ed amarezza sentendosi inutile a sé e agli altri.

L'epoca di una simile possibile infelicità sarebbe finita con l'avvento della società telematica che permetterebbe a tutti, con poca spesa, di accedere alle fonti del sapere. In tal modo si sarebbe aperta la via per una società sempre più colta, intelligente e razionalmente organizzata.

Il problema drammatico che si crea quando vi è grande facilità di accesso alle fonti del sapere è quello di come **selezionare** tra le fonti offerte. Si tratterebbe cioè di stabilire un ordinamento tra di esse per stabilirne dei confronti qualitativi e quindi dedicare ulteriore studio ed attenzione alle fonti giudicate migliori.

Per arrivare ad una selezione accurata, e quindi affidabile, bisognerebbe conoscere a sufficienza ogni oggetto di giudizio, ma se questi sono molti il costo, se non altro in termini di tempo, dell'acquisire l'informazione sarebbe davvero proibitivo e si rischierebbe di rendere impossibile un adeguato approfondimento degli oggetti selezionati come massimali in questo ordinamento per qualità. Questo è tanto più vero quando, per riuscire a valutare in modo appropriato, si renda necessario acquisire abilità preliminari molto impegnative quali, ad esempio, la capacità di comprendere a fondo una lingua straniera, di appropriarsi di un linguaggio specialistico, di seguire un linguaggio simbolico complesso quale, ad esempio, quello matematico.

A causa di costi di informazione troppo elevati, un mondo troppo popolato di proposte conoscitive rischia di diventare altrettanto impenetrabile di un mondo in cui queste, seppure molto meno numerose, sono difficilmente accessibili.

Un modo per superare l'eccessivo affollamento potrebbe essere quello di promuovere, magari rendendola economicamente profittevole, una specifica attività di selezione. E' quello che accade con una casa editrice o discografica o con una galleria d'arte, il servizio specifico che essa offre dovrebbe essere proprio questa pratica di selezione dei prodotti migliori.

Tuttavia vi sono delle grandi difficoltà che rendono difficile che il meccanismo funzioni.

La selezione è ovviamente molto costosa, il suo costo dovrebbe quindi essere ripartito tra un numero sufficientemente alto di utilizzatori dell'informazione che la selezione ha elaborato. Quello che non è facile riuscire a garantire è che gli utilizzatori non trovino il modo di avere l'informazione non direttamente da chi ha fatto la selezione, che si fa pagare il servizio, ma indirettamente da chi ha già ricevuto l'informazione pagandola. La difficoltà ad impedire questi meccanismi di aggiramento informativo rende difficilmente conveniente una seria attività di selezione.

Una seconda difficoltà è quella di come operare una qualche forma di controllo su come viene fatta la selezione. Controllarla significherebbe rifare la selezione seppure usando metodi di campionamento statistico, ma questo è in ogni caso piuttosto costoso. Ma c'è una difficoltà ancora più sostanziale. Chi fa la selezione vuole costruirsi e mantenere una sua reputazione, ma a quale pubblico guarda per costruirsela? Quello dei pochi davvero capaci di apprezzare i prodotti migliori o quello molto più numeroso di coloro che si ritengono esperti senza tuttavia avere molti parametri differenziati e maturi di giudizio? La maggiore numerosità di questo secondo gruppo sembrerebbe indirizzare chi seleziona ad avere una buona reputazione presso questi. In effetti le televisioni che si fanno guidare nello stabilire i loro programmi dalle quote dei loro spettatori, finiscono per offrire un prodotto certamente popolare ma non molto sofisticato né intellettualmente né esteticamente.

Un testo che vale la pena di studiare rivela la sua ricchezza solo a tappe successive, qualcosa di più ad ogni nuova lettura, e solo a chi ha una intelligenza matura e differenziata. Disporre del testo diventa davvero una piccola parte dello sforzo richiesto. Il costo di tutto ciò aumenta al crescere dell'affollamento dei testi tra cui si deve selezionare quelli meritevoli di ulteriore studio. Alla fine non pare che la facilità di offrire testi e di disporne sia necessariamente un vantaggio in termini di costo dell'informazione.